２値化

白または黒、偶数または奇数、０または１のように２つ（一般的には有限個）に分割して考えると、すっきりした証明ができることがある。
ある条件を満たす解が存在しないことを証明する場合に、このような考え方は有用である。

０．目次

問題５　方眼紙被覆問題

５つの図形、Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅをひとつずつ組み合わせて、
４×５の方眼紙を覆えるか考察せよ。

＜＜図省略＞＞

問題６　配置換え問題

（１）1,2,3,4,5,6,7,8,9が一列に並んでいる。隣接する２数を交換する操作を奇数回行って、9,8,7,6,5,4,3,2,1が得られないことを示せ。

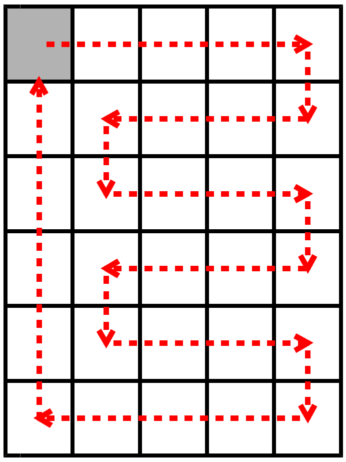
（２）四角形の枠の中に1から15までの数字の書かれた駒が入っている。駒1個分のスペースを利用して駒を上下左右に動かすことができるとき、左図から右図が得られないことを示せ。

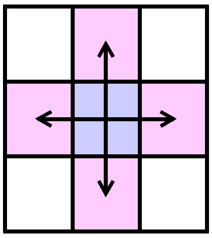
＜＜図省略＞＞

問題１　周遊問題

（１）a×b(a, bは自然数)の方眼紙で、左上隅のマス目から１匹のカブトムシが出発して、すべてのマス目を一度ずつ訪問した後、また最初に出発した左上隅のマス目に戻ってくる経路（周遊経路）が存在するかどうか考察する。
ただし、カブトムシは上下左右の隣接するマス目に進めるものとする。

（考察１）a×bの方眼紙を左上隅のマス目から出発しすべてのマス目を一度ずつ訪問後、左上隅のマス目に戻る方法の数。





カブトムシは
上下左右の隣接する
マス目に進める。

a	b	解の数
3	1	0
3	2	2
3	3	0
3	4	4
3	5	0
3	6	8
3	7	0
3	8	16
3	9	0
3	10	32

a	b	解の数
4	1	0
4	2	2
4	3	4
4	4	12
4	5	28
4	6	74
4	7	184
4	8	472
4	9	1192
4	10	3034

a	b	解の数
5	1	0
5	2	2
5	3	0
5	4	28
5	5	0
5	6	308
5	7	0
5	8	3392
5	9	0
5	10	37368

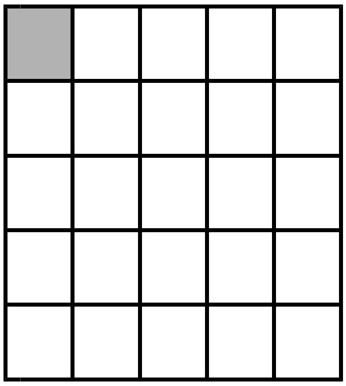
a	b	解の数
6	1	0
6	2	2
6	3	8
6	4	74
6	5	308
6	6	2144
6	7	10640
6	8	65350
6	9	350588
6	10	2048056

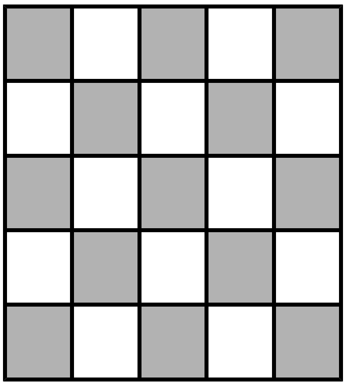
a	b	解の数
7	1	0
7	2	2
7	3	0
7	4	184
7	5	0
7	6	10640
7	7	0
7	8	602768
7	9	0
7	10	34132984

a	b	解の数
8	1	0
8	2	2
8	3	16
8	4	472
8	5	3392
8	6	65350
8	7	602768
8	8	9277152
8	9	98966276
8	10	

（考察２）５×５の方眼紙ではできない。

方眼紙を白と黒の市松模様に塗り分ける。





５×５の方眼紙を白と黒の市松模様に塗り分けると、白のマス目から進めるマス目は、すべて①　のマス目となり、黒のマス目から進めるマス目はすべて②　のマス目になる。したがって、どの経路も出発点のマス目が黒なら、あとどの方向に進んでも、白・黒・白・黒・・・となる。すなわち、奇数番目が③　、偶数番目が④　となる。したがって、25番目のマス目は⑤　になる。

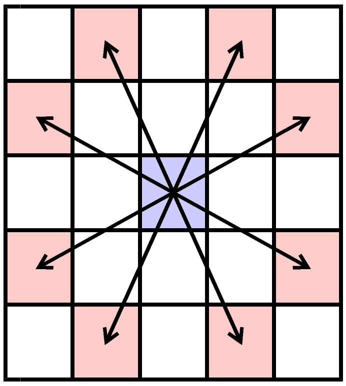
順番	1	2	3	・・・	24	25	26
マス目	黒	白	黒	・・・	白	黒	白

一方、出発点の左上隅のマス目に戻ってきたときは２６番目になるが、出発点のマス目は黒である。黒から⑥　には進めない。結局、５×５方眼紙では不可能ということになる。

●まとめ

a	b	移動
偶数	偶数	⑦
偶数	奇数	⑧
奇数	偶数	⑨
奇数	奇数	⑩

（２）ａ×ｂ(a, bは自然数)の方眼紙で、左上隅のマス目から１匹のカブトムシが出発して、すべてのマス目を一度ずつ訪問した後、また最初に出発した左上隅のマス目に戻ってくることができるかどうか考察する。
ただし、カブトムシはチェスのナイトの動きでマス目に進めるものとする。



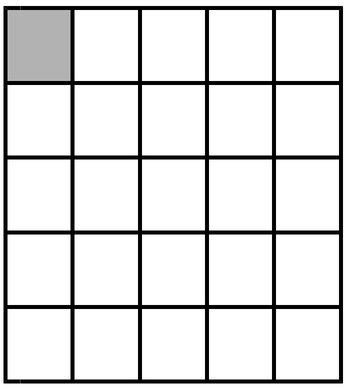
（考察１）ａ×ｂの方眼紙を左上隅のマス目から出発しすべてのマス目を一度ずつ訪問後、左上隅のマス目に戻る方法の数。

a	b	解の数
3	1	0
3	2	0
3	3	0
3	4	0
3	5	0
3	6	0
3	7	0
3	8	0
3	9	0
3	10	32

a	b	解の数
4	1	0
4	2	0
4	3	0
4	4	0
4	5	0
4	6	0
4	7	0
4	8	0
4	9	0
4	10	0

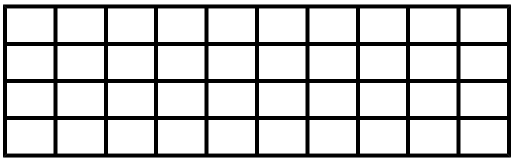
a	b	解の数
5	1	0
5	2	0
5	3	0
5	4	0
5	5	0
5	6	16
5	7	0
5	8	88404
5	9	0
5	10	

（考察２）５×５の方眼紙ではできない。

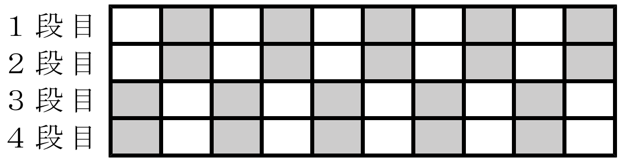


（１）考察２と同様に証明できる。

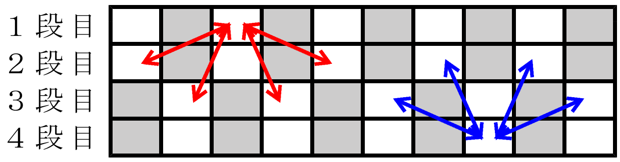
（考察３） ４×n(n≧2)の方眼紙上の任意のマス目から出発して、チェスのナイトの動きですべてのマス目を一度ずつ通り、最初のマス目に戻ることは不可能である。



４×n(n≧2)の方眼紙を図のように白と黒で塗り分ける。図で最上段から最下段へ1段目、2段目、3段目、4段目とする。

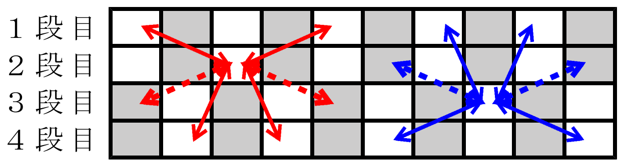


1段目と4段目の白いマス目に着目する。
これらの白いマス目を通る場合、直前のマス目と直後のマス目は、必ず2段目と3段目の① ____ マス目を通る。



そして、1段目と4段目の白いマス目は、合計でn個あることから、周遊経路が存在するためには、2段目と3段目の白いマス目は合計で、少なくとも② ____ 個必要となる。

ところが、2段目と3段目の白いマス目は、合計でちょうど③ ____ 個しかないので、2段目と3段目のn個の白いマス目はすべて、1段目と4段目の白いマス目の直前と直後のマス目となる。これでは、2段目と3段目の白いマス目から黒いマス目に移動できない。

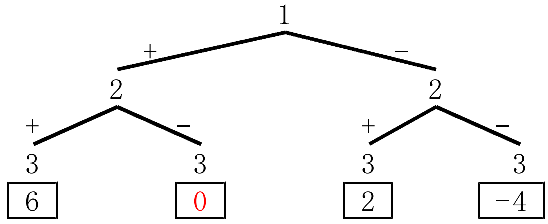


このことから、白いマス目から出発すれば、④ ____ マス目にしか移動できないことがわかる。同様にして、黒いマス目から出発すれば、⑤ ____ マス目にしか移動できないこともわかる。結局、４×nの方眼紙上の任意のマス目から出発して、ナイトの動きで、すべてのマス目を一度ずつ通り最初のマス目に戻る周遊経路は存在しない。

問題２　偶数と奇数

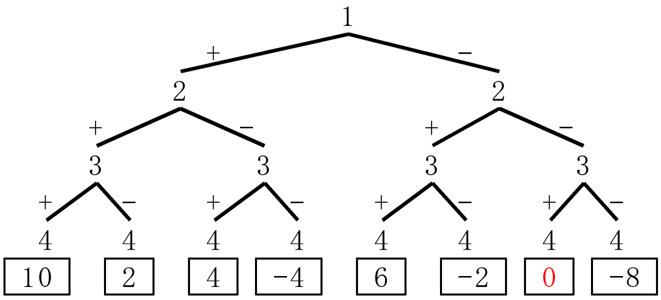
1からnまでの数を１列に並べ、数の間に＋か－を置いたとき、総和が0になるものについて考察する。n(1≦n≦10)について、総和が0の個数を求めよ。

●n=3の場合、すべての場合を示す。



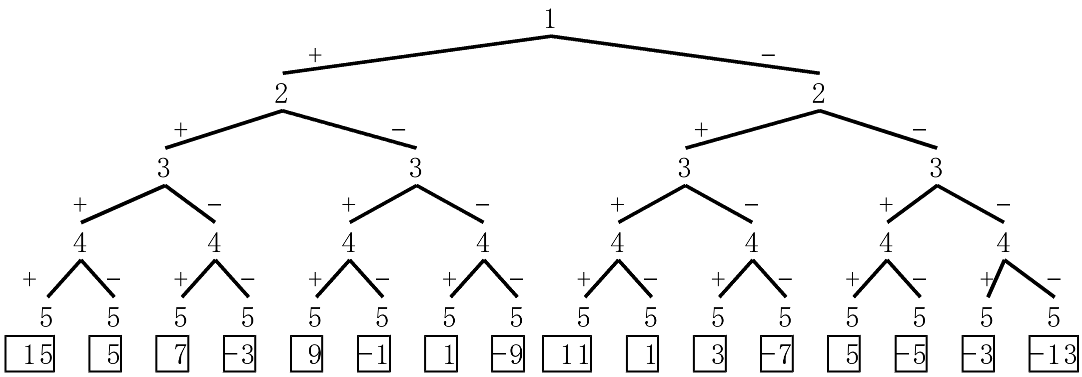
上図では、1+2-3=0で、0が実現できた。

●n=4の場合、すべての場合を示す。



上図では、1-2-3+4=0で、0が実現できた。

●n=5の場合、すべての場合を示す。



結果を見ると、0はなく、すべて奇数になっている。

n=10で考察する。

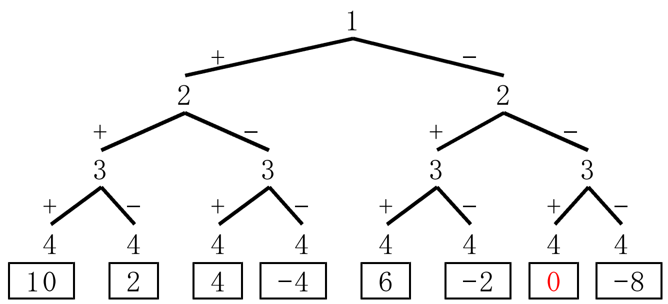
1から10までの総和は55となり、奇数である。1+2+3+4+5+6+7+8+9+10から始めて、数xの前の符号を変えると（＋から－へ、または－から＋へ）、総和に①の影響を与える。すなわち、総和は常に②となり、偶数にはならない。したがって、0にはならない。

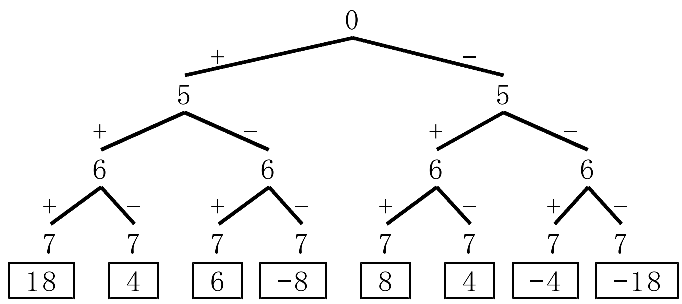
n	総和0の個数	総和
1	0	1
2	0	3
3	1	6
4	1	10
5	0	15
6	③	21
7	④	28
8	⑤	36
9	⑥	45
10	⑦	55

1+2−3=0
1−2−3+4=0

●n=7の解は、④　　個ある。

1	1+2−3+4−5−6+7
2	1+2−3−4+5+6−7
3	1−2+3+4−5+6−7
4	⑧

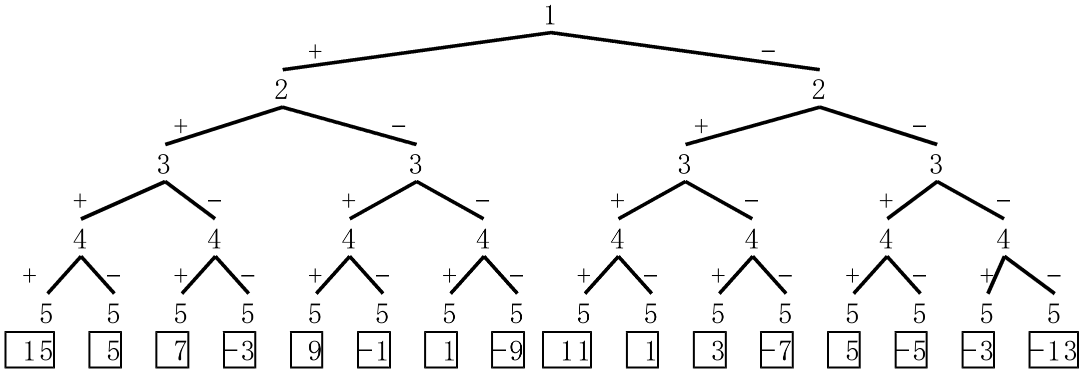


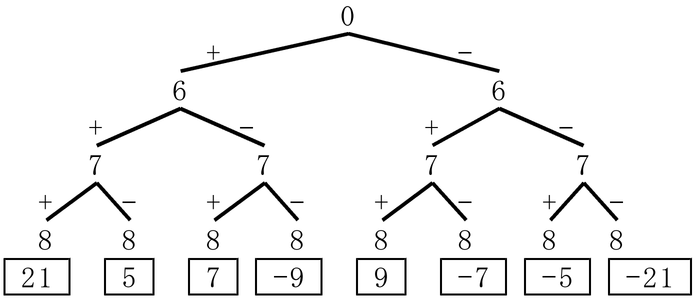


上下の樹形図の最下段で和が0となるものを列挙すればよい。

●n=8の解は、⑤　　個ある。

1	⑨
2	1+2+3−4+5−6+7−8
3	1+2−3+4+5+6−7−8
4	1+2−3−4−5−6+7+8
5	1−2+3−4−5+6−7+8
6	1−2−3+4+5−6−7+8
7	1−2−3+4−5+6+7−8



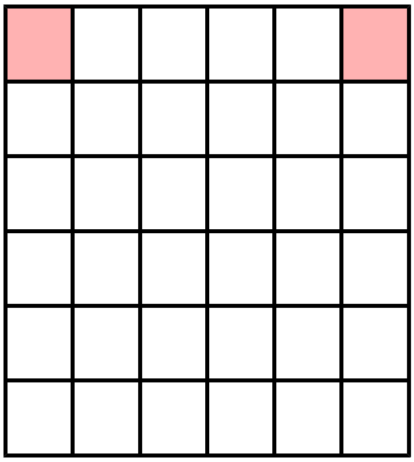


上下の樹形図の最下段で和が0となるものを列挙すればよい。

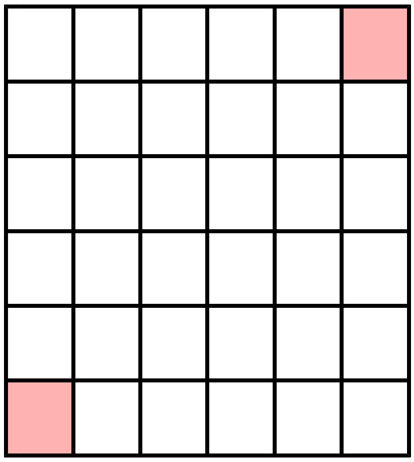
問題３　方眼紙被覆問題

６×６の方眼紙上で２つのマス目(塗られている)が切り取られている。この方眼紙上の残りのマス目を、１×２の方眼紙(マス目２個分の大きさ)で覆うことを考える。５つの場合について、「覆える」か「覆えない」か判断せよ。ただし、１×２の方眼紙または２×１の方眼紙は、この方眼紙の境界からはみ出すことなく、またどの2枚の方眼紙も互いに重ならないものとする。

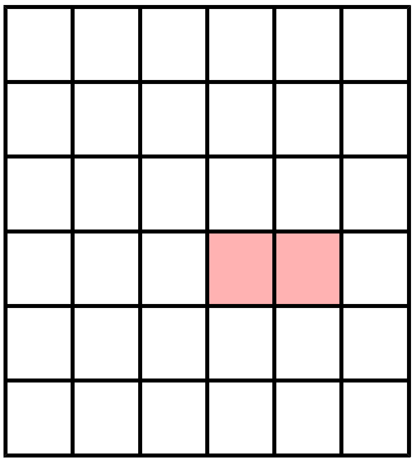
（ａ）



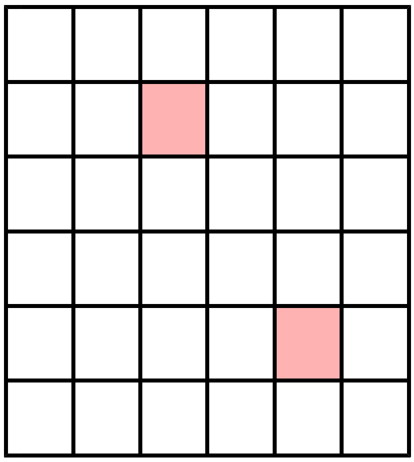
（ｂ）



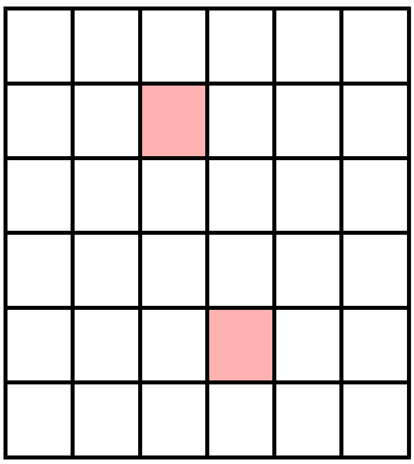
（ｃ）

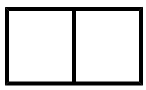


（ｄ）

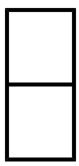


（ｅ）



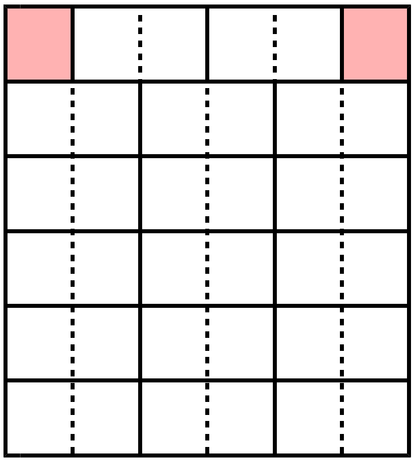


１×２の方眼紙



２×１の方眼紙

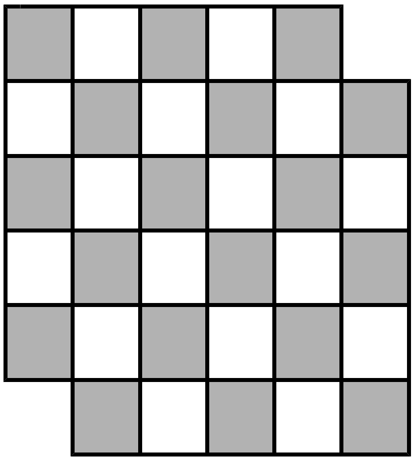
（ａ）の解：「覆える」　具体例を示す。



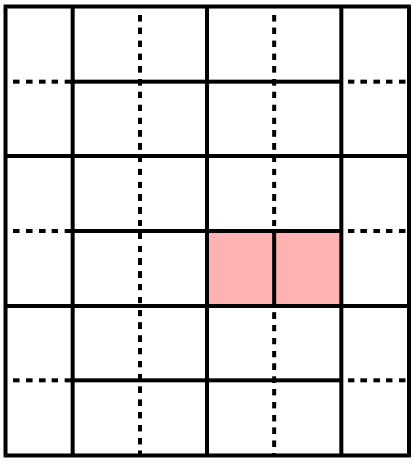
（ｂ）の解：「覆えない」

図のように６×６の方眼紙を白と黒で市松模様に塗り分ける。１×２の方眼紙は、６×６の方眼紙の１つの黒いマス目と１つの白いマス目を覆う。

したがって、１×２の方眼紙で、この６×６の方眼紙を覆ったとすると、①　　　　の黒いマス目と白いマス目が必要になる。一方、この６×６の方眼紙の黒いマス目は、②　　　個、白いマス目は、③　　　個となる。
つまり、この６×６の方眼紙には、④　　　　　の黒いマス目と白いマス目があるので、１×２の方眼紙で覆うことはできない。

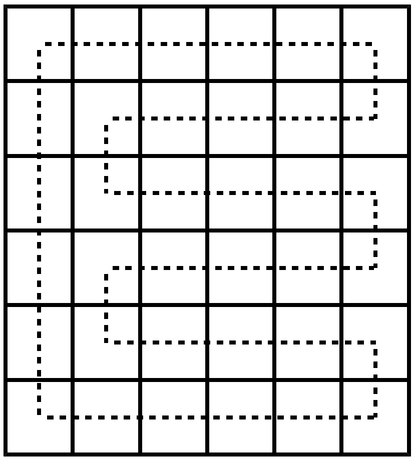


（ｃ）の解：「覆える」　具体例を示す。

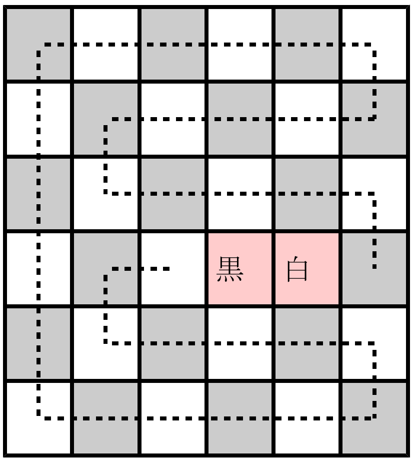


具体例を見つけるにしても、偶然ではなく論理的に見つけたい。そこで、(c)が覆える理由を示す。

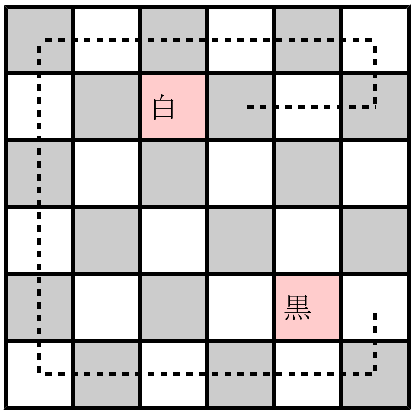
図のように、６×６の方眼紙上に折れ線を考える。

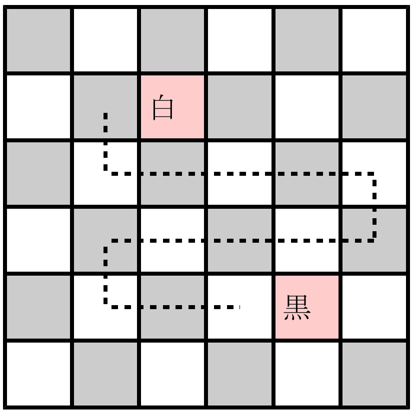


切り取られた２カ所のマス目が図の折れ線に沿って隣接するとき、折れ線上では、白いマス目と黒いマス目が⑤　　　　つながっており、全部で⑥　　　　のマス目のつながりとなるので、図のように、１×２の方眼紙でこの６×６の方眼紙を覆うことができる。



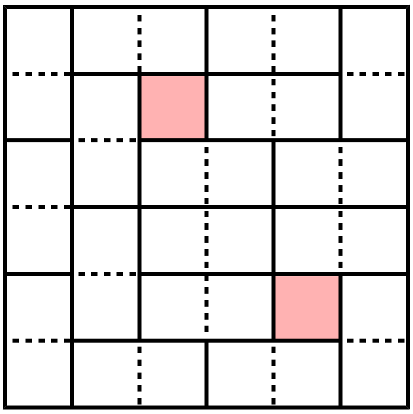
切り取られたマス目が隣接しないとき、折れ線は２つの部分に分けられる。





しかし、どちらの部分も、白いマス目と黒いマス目が⑦　　　つながる全部で⑧　　　のマス目のつながりとなるので、図のように、１×２の方眼紙で覆うことができる。以上により、証明された。

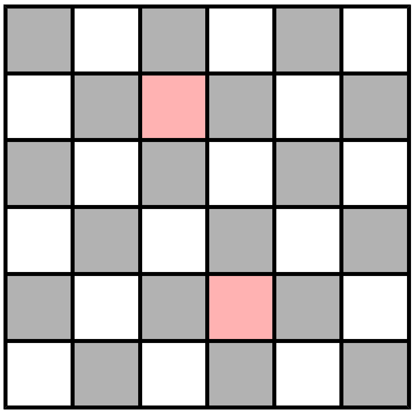
（ｄ）の解：「覆える」



（ｅ）の解：「覆えない」

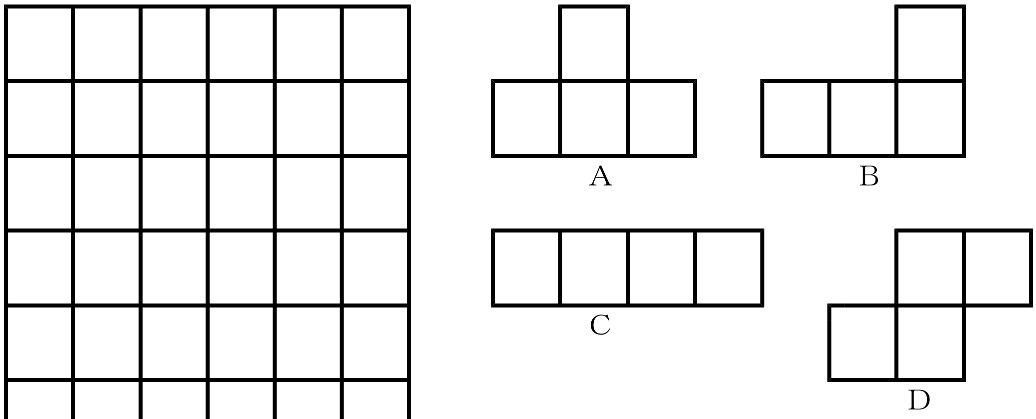
図のように６×６の方眼紙を白と黒で市松模様に塗り分ける。１×２の方眼紙は、この６×６の方眼紙の１つの黒いマス目と１つの白いマス目を覆う。

したがって、１×２の方眼紙で、この６×６の方眼紙を覆ったとすると、⑨　　　の黒いマス目と白いマス目になる。一方、この６×６の方眼紙の黒いマス目は、⑩　　　個、白いマス目は、⑪　　　個となる。つまり、この６×６の方眼紙には⑫　　　の黒いマス目と白いマス目があるので、１×２の方眼紙で覆うことはできない。



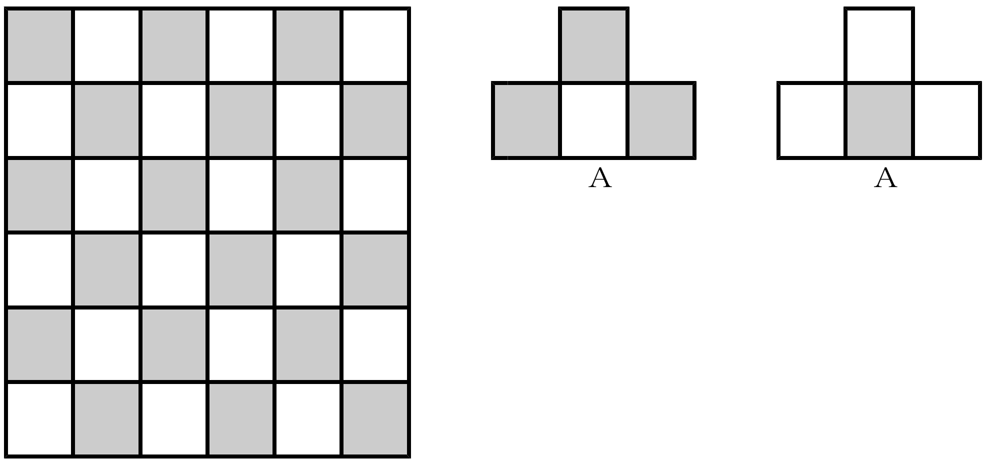
問題４　方眼紙被覆問題

６×６の方眼紙をつぎの図形Ａを９個用いて覆えるか調べよ。
ただし、この方眼紙の境界からはみ出すことなく、またどの２個の図形も互いに重ならないものとする。図形Ｂ，Ｃ，Ｄについても考察せよ。



●Ａの場合

６×６の方眼紙をつぎのように白黒に塗り分ける。



６×６の方眼紙では、白と黒は同数である。ところが図形Ａでは、黒１個か黒３個となる。
前者をｘ（≧０）個、後者をｙ（≧０）個とすると、

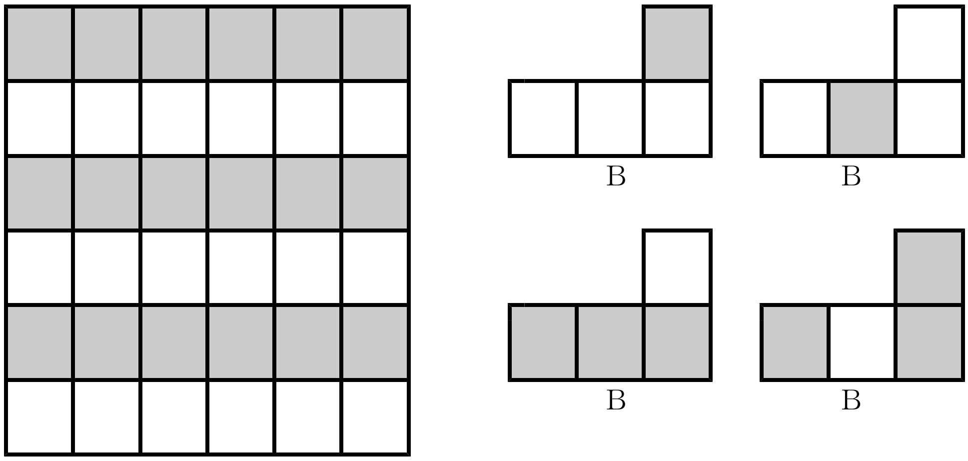
$x + y =$ ①＿＿＿

$x + 3y =$ ②＿＿＿

を満たす必要があるが、上式を満たす整数解は存在しない。
したがって、図形Ａで覆うことはできない。

●Ｂの場合

６×６方眼紙をつぎのように白黒に塗り分ける。



６×６方眼紙では、白と黒は同数である。ところが図形Ｂでは、黒１個か黒３個となる。前者を $x\ (\geqq 0)$ 個、後者を $y\ (\geqq 0)$ 個とすると、

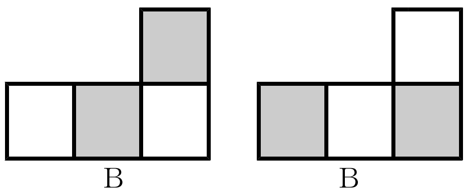
$x + y =$ ③

$x + 3y =$ ④

を満たす必要があるが、上式を満たす整数解は存在しない。
したがって、図形Ｂで覆うことはできない。

（考察）

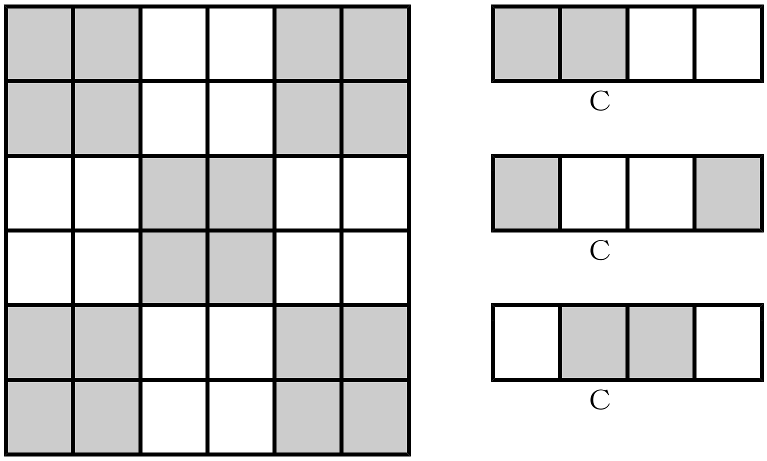
白黒の市松模様に塗り分けた場合図形Ｂはつぎのようになる。



これでは、合計９枚を配置しても、白と黒は同数に変わりなく、不都合な事実を見つけられない。

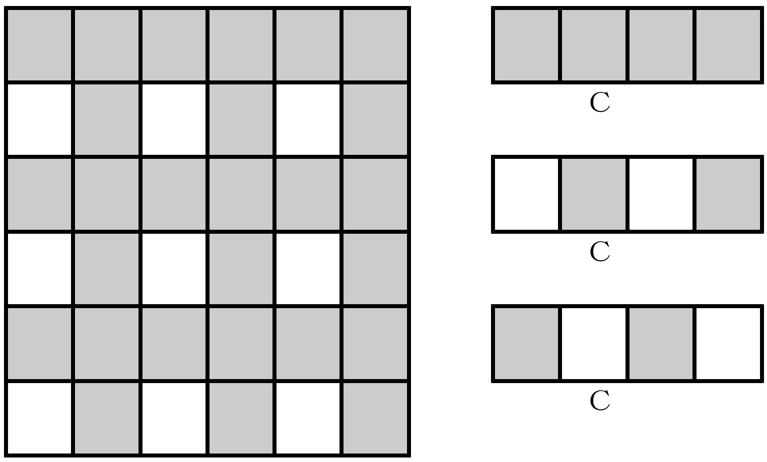
●Ｃの場合

６×６の方眼紙をつぎのように白黒に塗り分ける。



６×６の方眼紙では、白１６個、黒２０個である。ところが図形Ｃでは、黒と白は⑤　　　である。したがって、図形Ｃで覆うことはできない。

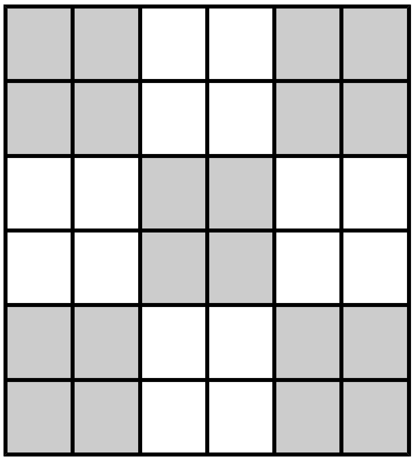
（別解）

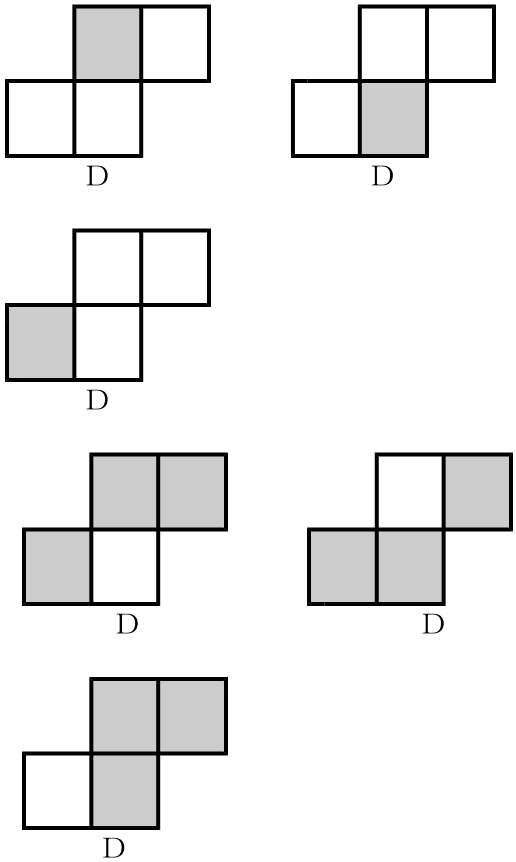


６×６の方眼紙では、白９個、黒２７個である。ところが図形Ｃでは、白と黒は、⑥　　　である。したがって、図形Ｃで覆うことはできない。

●Dの場合

６×６の方眼紙をつぎのように白黒に塗り分ける。





６×６方眼紙では、白１６個,黒２０個である。ところが図形Dでは、黒１個か黒３個となる。前者をx（≧０）個、後者をy（≧０）個とすると、

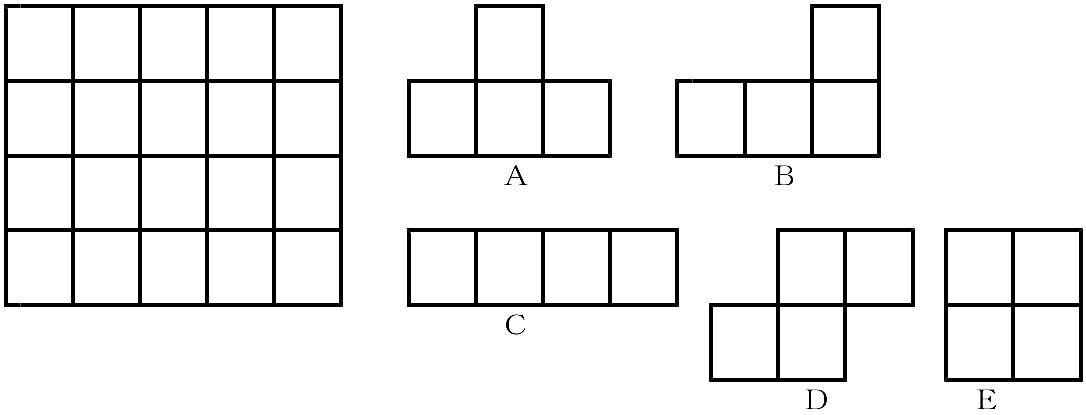
$x + y =$ ⑦

$x + 3y =$ ⑧

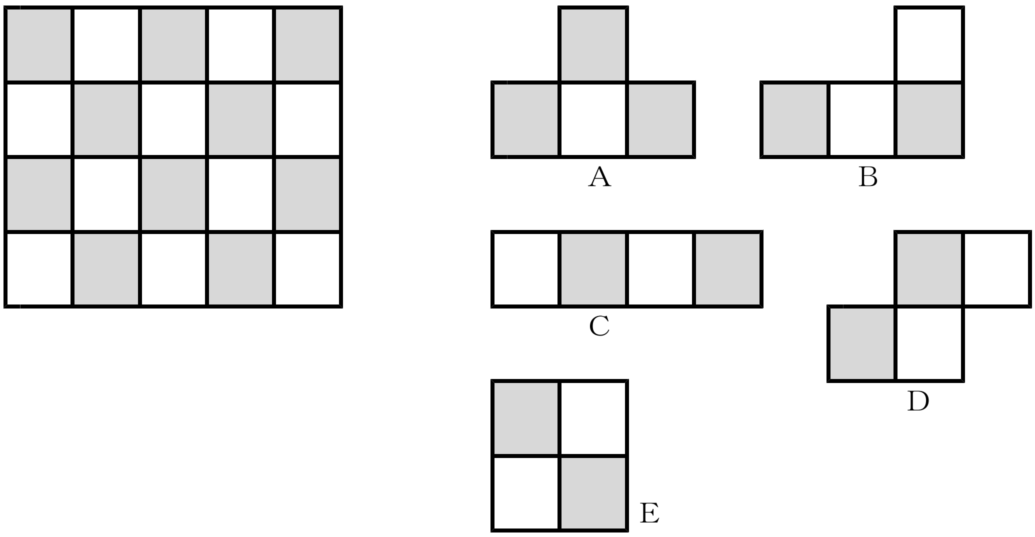
を満たす必要があるが、上式を満たす整数解は存在しない。
したがって、図形Dで覆うことはできない。

問題５　方眼紙被覆問題

５つの図形、A，B，C，D，E をひとつずつ組み合わせて、４×５の方眼紙を覆えるか考察せよ。



４×５の方眼紙を白と黒の市松模様に塗り分ける。５つの図形も隣接するマス目の色が異なるように白と黒で塗り分ける。　こうすると、B，C，D，E では白いマス目が２個、黒いマス目が２個となるが、A では白いマス目が①　　個、黒いマス目が②　　個（または、白いマス目が②　　個、黒いマス目が①　　個）となる。
すなわち、５つの図形を組み合わせると白いマス目が③　　個、黒いマス目が④　　個（または、白いマス目が④　　個、黒いマス目が③　　個）となる。
一方、４×５の方眼紙では白いマス目が⑤　　個、黒いマス目が⑥　　個となるので、５つの図形をどのように組み合わせても、４×５の方眼紙を作るのは不可能である。



問題６　配置換え問題

（１）1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9が一列に並んでいる。隣接する２数を交換する操作を奇数回行って、9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1が得られないことを示せ。

与えられた数列を$a_1, a_2, \cdots, a_9$とする。

a_kより前にある数$a_1, \cdots, a_{k-1}$のなかでa_kより大きい数の個数をc_kとする。

それらの総和$c_1+c_2+\cdots+c_9$を転倒数Ｃと呼ぶ。

転倒数Ｃに着目する。例を示す。

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	4	5	6	7	8	9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	3	4	6	5	7	8	9	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
2	1	3	4	6	5	7	9	8	0	1	0	0	0	1	0	0	1	3

一般に、どの隣接する２数を交換しても、転倒数は①　　増加する。

また、１回の操作ごとに、転倒数は、偶数、奇数を交代に繰り返す。

一方、9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1の転倒数は、つぎのように36である。

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	C
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	36

したがって、9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1は、②　　　回目の操作後に得られる。
この結果、③　　　回目の操作後には得られない。

（２）四角形の枠の中に1から15までの数字の書かれた駒が入っている。
駒1個分のスペースを利用して駒を上下左右に動かすことができるとき、左図から右図が得られないことを示せ。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	１０	１１	１２
１３	１５	１４	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	１０	１１	１２
１３	１４	１５	

第1行（一番上の行）の左端から一マスずつ右端へ、右端にたどり着いたなら、第2行の左端から一マスずつ右端へという順にマスの中の数字を調べる。

そして、一つ一つのマスの中の数字について、その数字より大きい数字が前に何個あるか数える。その個数の総和を転倒数ということにする。

左図では、１４と１５が入れ替わっているので転倒数は④　、右図では、数字が昇順なので転倒数は⑤　になる。

つぎに、スペースの動きに注目する。スペースを左右に動かしても転倒数に⑥　はない。

ところが、スペースを上下に動かすと、つぎのように4通りの場合がある。

それぞれの転倒数は、スペースを動かす前と後で変化する。

場合１

a	b	c	d
	e	f	g

→

	b	c	d
a	e	f	g

場合２

a	b	c	d
e		f	g

→

a		c	d
e	b	f	g

場合３

a	b	c	d
e	f		g

→

a	b		d
e	f	c	g

場合４

a	b	c	d
e	f	g	

→

a	b	c	
e	f	g	d

●場合１について考察する。

場合１

a	b	c	d
	e	f	g

→

	b	c	d
a	e	f	g

左図から右図に変わったとき、aとb, aとc, aとdの順序が変わる。他の数字との順序は変わらない。したがって、転倒数の変化はつぎのようになる。

{b, c, d} の中にaより大きい数字が3個ある場合、転倒数は3増加する。

{b, c, d} の中にaより大きい数字が2個ある場合、転倒数は1増加する。

{b, c, d} の中にaより大きい数字が1個ある場合、転倒数は⑦$\boxed{\quad}$減少する。

{b, c, d} の中にaより大きい数字が0個ある場合、転倒数は⑧$\boxed{\quad}$減少する。

すなわち、スペースを1回上または下に動かすと、転倒数は偶数から奇数、または奇数から偶数へと変化する。

他の場合についても同様の結果を得る。

最初、右下隅にあったスペースが移動して、最後に、右下隅に戻ったとすると、上に動いた分だけ下に動いているから、偶数回のスペースの上下が生じている。

したがって、途中どのようにスペースを動かしても、転倒数の偶奇は保存されることになる。

結局、左図の転倒数は⑨$\boxed{\quad\quad}$、右図の転倒数は⑩$\boxed{\quad\quad}$だから、左図から右図は得られないことがわかる。