部屋割論法

０．目次

問題１　２点間の距離

（１）１辺が長さ１の正６角形の土地に、７個の小石を勝手にばらまく。
２つの小石間の距離が１以下のものが必ずあることを示せ。

（２）辺の長さが、4である正方形の土地に、任意にｎ本の木を植える。
木の距離がｄ以下になるような2本の木が存在することを示せ。

$n=5$のとき、$d=2\sqrt{2}$。
$n=17$のとき、$d=\sqrt{2}$。

（３）３×４の方眼紙上に、任意に７個の点を書く。
このとき、点の距離が$\sqrt{5}$以下になるような２個の点が存在することを示せ。

（４）３×４の方眼紙上に、任意に６個の点を書く。
このとき、点の距離が$\sqrt{5}$以下になるような２個の点が存在することを示せ。

問題２　三角形の面積

１辺の長さが2の正方形の内部に任意に9個の点をとったとき、
その中の3点を頂点とするような三角形で、面積が1/2以下のものがあることを示せ。

問題３

（１）1から2nまでの整数の中から任意にn+1個の数を選びだしたとき、
その中に差がnとなる２つの数の組が、必ずあることを示せ。

（２）1から2nまでの整数の中から任意にn+1個の数を選びだしたとき、
その中に一方が他方を割り切るような２つの数の組が、
必ずあることを示せ。

問題４　四隅同色問題

（１）2×5の盤がある。各マス目を白と黒のどちらかで塗る。
このとき、どのような塗り方をしても、少なくとも２つの列の塗り方は同じであることを示せ。

（２）3×9の盤がある。各マス目を白と黒のどちらかで塗る。
このとき、どのような塗り方をしても、少なくとも２つの列の塗り方は同じであることを示せ。

（３）3×7の盤がある。各マス目を白と黒のどちらかで塗る。このとき、少なくともひとつの長方形の４つの角のマス目は、同色になっていることを示せ。

問題５

（１）10個の自然数がある。これらの中から２つの自然数を適当に選べば、その差が9で割り切れるような２つの数が必ずあることを示せ。

（２）n個の自然数を一列に並べたとき、これらの中の連続して並んだ何個かの数の和の中に、nの倍数となるものが必ずあることを示せ。

問題６

1g以上8g以下の8種類の分銅の中から、重複なく勝手に5個選び出す。このとき、互いに他の分銅を含まない２組のグループで、各グループに含まれる分銅の総和が等しいものが存在することを示せ。

問題７

サッカー大会に6チームが参加しました。この6チームの中には、今までにお互いに対戦した3チームがあるか、または今までにお互いに一度も対戦したことがない3チームがあることを示せ。

「n個の部屋にn+1人以上の客を入れようとすれば、
相部屋のところが必ずできる」

という事実を用いて証明する方法を部屋割論法という。

一般化された部屋割論法は、

「n個の部屋に、kn+1(k≧1)人以上の客を入れようとすれば、
k+1人以上の客が入る部屋が必ずできる」

となる。

具体的な問題に、この論法を適用する場合、部屋と客に対応するものを明確にすることが大切である。また、この論法は、ある条件を満たす解を具体的に求めることなく、その存在を証明するときに有用である。

いくつか例を示す。

［例１］「9個以上のリンゴを8個の箱に入れようとすると、少なくとも2個のリンゴが入っている箱ができる」

［例２］「13人のうち、少なくとも2人が同じ月に生まれている」

［例３］「サイコロを7回投げると、少なくとも2回出る目がある」

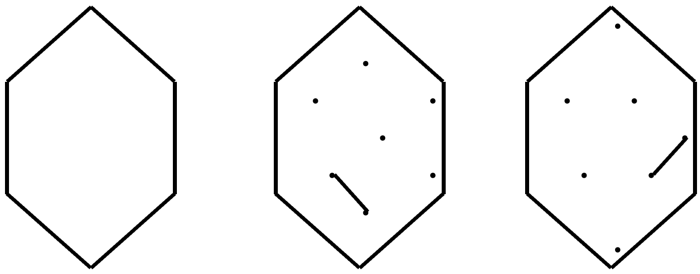
［例４］「１辺3mの正方形の土地に10本以上の木を植えるとき、木の間隔が$\sqrt{2}$m以下になるような2本の木がある」

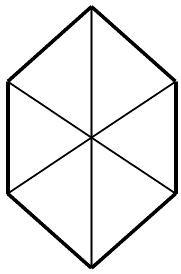
［例５］「ある山に8001本の桜の木が生えている。1本の木に8000枚以上の葉がある桜の木はないとする。この山には、同じ枚数の葉をもつ桜の木が少なくとも2本ある」

問題１　２点間の距離

（１）１辺が長さ１の正６角形の土地に、７個の小石を勝手にばらまく。
２つの小石間の距離が１以下のものが必ずあることを示せ。

２つの石の間隔を広げようとしても他の石との間隔が狭くなり、
７個の石のすべての間隔を１より大きくできないことを意味する。

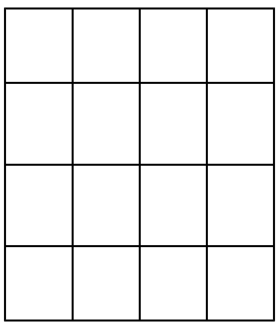




正６角形の中心と辺上の点を結び、６個の正３角形を作る。この中に７個の石をばらまくと、どれかの正３角形の中に２点存在する。

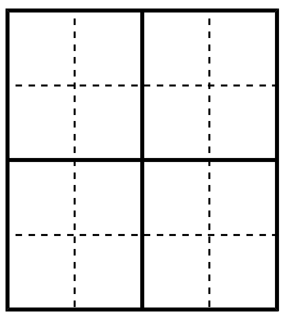
正３角形中の２個の石の最大距離は１である。したがって、距離が１以下となる２個の石が必ずある。

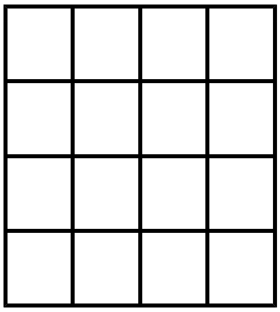
（２）辺の長さが、4である正方形の土地に、任意にｎ本の木を植える。
木の距離がｄ以下になるような2本の木が存在することを示せ。



n	d
5	$2\sqrt{2}$
17	$\sqrt{2}$

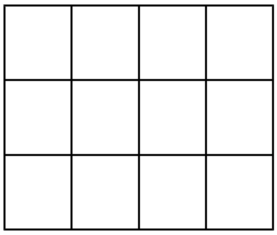
図のように4個の正方形に分ける。部屋割論法（4個の正方形が4個の部屋に対応し、5本の木が5人の客に対応する）により、木が 2 本以上存在する正方形がある。ところが、正方形のなかの2本の木の最大距離は対角線の長さ $2\sqrt{2}$ だから、距離が$2\sqrt{2}$ 以下になるような2本の木があることがわかる。以上より、命題が証明された。

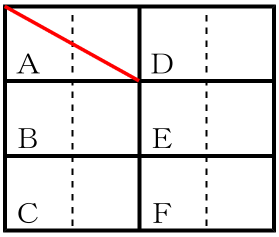




図のように16個の正方形に分ける。
部屋割論法（16個の正方形が16個の部屋に対応し、17本の木が17人の客に対応する）により、木が 2 本以上存在する正方形がある。
ところが、正方形のなかの2本の木の最大距離は対角線の長さ $\sqrt{2}$ だから、距離が$\sqrt{2}$ 以下になるような2本の木があることがわかる。
以上より、命題が証明された。

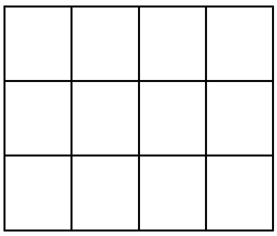
（３）３×４の方眼紙上に、任意に７個の点を書く。
このとき、点の距離が$\sqrt{5}$ 以下になるような２個の点が存在することを示せ。

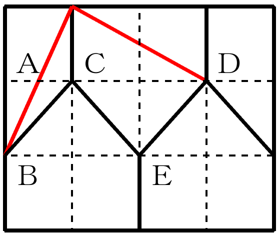




３×４の方眼紙を図のように６個の領域（ＡＢＣＤＥＦ）に分ける。部屋割論法（６個の領域が６個の部屋に対応し、７個の点が７人の客に対応する）により、点が ２ 個以上存在する領域がある。ところが、図より、各領域のなかの２個の点の最大距離は①　　だから、距離が②　　以下になるような２個の点があることがわかる。

（４）３×４の方眼紙上に、任意に６個の点を書く。
このとき、点の距離が$\sqrt{5}$ 以下になるような２個の点が存在することを示せ。





３×４の方眼紙を図のように５個の領域（ＡＢＣＤＥ）に分ける。部屋割論法（５個の領域が５個の部屋に対応し、６個の点が６人の客に対応する）により、点が２個以上存在する領域がある。ところが、図より、各領域のなかの２個の点の最大距離は③　　だから、距離が④　　以下になるような２個の点があることがわかる。

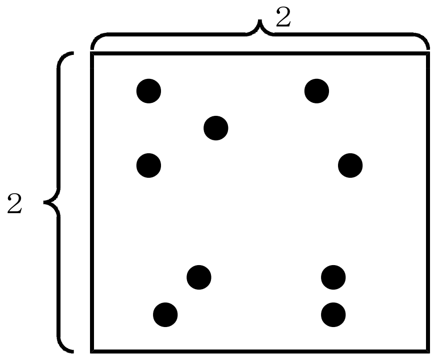
（注意） 領域が同じ図形でないことに注目。大切なのは各領域内の２点間の最大距離である。

問題２　三角形の面積

２×２の方眼紙内部に任意に9個の点をとったとき、その中の３点を頂点とするような三角形で、面積が１／２以下のものがあることを示せ。

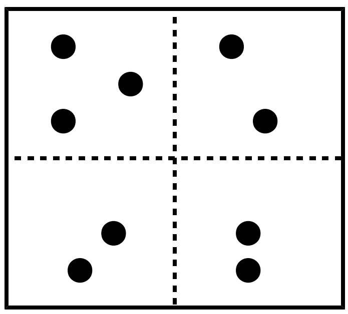
３点を頂点とする三角形の面積を大きくしようと、点の間隔を大きくしても他の点との間隔を狭くし、三角形の面積を小さくしてしまう。

結局、すべての三角形の面積を１／２より大きくすることはできず、
面積が１／２以下のものがあることを意味する。



２×２の方眼紙を、１辺が１となる単位正方形に４等分する。

部屋割論法（４個の単位正方形が４個の部屋に対応し、９個の点が９人の客に対応する）により、少なくともひとつの単位正方形に①　　　点が含まれる。

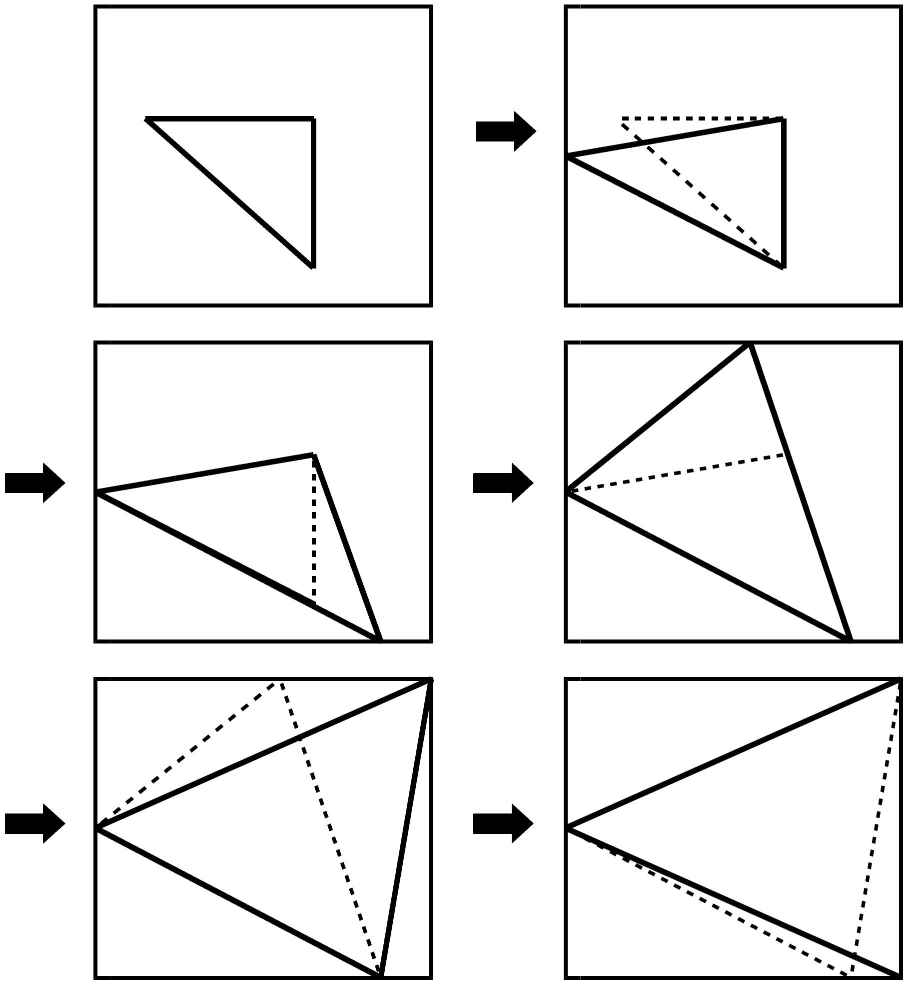


この単位正方形内の①　　　点に着目して、単位正方形内の任意の三角形の面積が②　　　　　以下であることを示す。

このことが示されれば、命題が証明されたことになる。

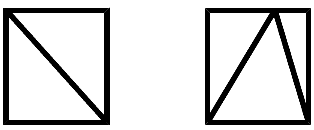
そのために、単位正方形内の三角形の最大面積が②　　　　　であることを示す。

　単位正方形内の３点からなる三角形において、いずれかの点が単位正方形内部にあるときは、その点を周囲に移動することにより三角形の面積を大きくできる。



したがって、３点のいずれも周囲に存在する三角形を考えればよい。

このような三角形の最大面積は、下図のような場合であり、その値は②　　　　である。



以上より、命題が証明された。

問題３

（１）1から2nまでの整数の中から任意にn+1個の数を選びだしたとき、
その中に差がnとなる２つの数の組が、必ずあることを示せ。

●例　n=5の場合

1　4　5　7　8　9

2　3　5　6　7　8

選んだn+1個の数を$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$とする。各x_iについて、nで割って得られる余りをr_iとすると、

$$x_i = n\cdot q_i + r_i \quad (q_i = 0\text{または}1\text{または}2\ ,\quad 0 \leqq r_i \leqq n-1\ )$$

が成り立つ。

そこで、部屋割論法（n個の余り0, 1, 2, ･･･, n−1がn個の部屋に対応し、n+1個の余り$r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$がn+1人の客に対応する）により、

$$r_i = r_j \ (i < j)$$

となるものがあることがわかる。すなわち、

$$x_i = nq_i + r_i,$$

$$x_j = nq_j + r_j$$

$x_i - x_j$ に着目する。

$$\begin{aligned} x_j - x_i &= n(q_j - q_i) + (r_j - r_i) \\ &= n(q_j - q_i) \end{aligned}$$

$1 \leqq x_j - x_i \leqq 2n-1$ より、$q_j - q_i$は、0、１のいずれかになる。

$q_j - q_i = 0$ とすると、 $x_j = x_i$ となり矛盾。

したがって、$q_j - q_i = 1$　を得る。

すなわち、$x_j - x_i = n$　が成り立つ。以上より、命題が証明された。

（考察）1から2nまでの整数の中で、いくつか選び出したとき、その中に差がnとなる２つの数の組がない集合を考える。

1からnまでのn個の要素からなる集合{1, 2, …, n-1, n}は必ず条件を満たす。
また、一般に、

「1から2nまでの整数の中から任意にn+1個の数を選びだしたとき、
その中に差がnとなる２つの数の組が必ずある」

ことが成り立つ。したがって、条件を満たす集合の最大要素数はnであることがわかる。

●2nの場合、最大要素数がnとなる。求める集合を示す。

2n=4	2n=6	2n=8	2n=10
1 2	1 2 3	1 2 3 4	1 2 3 4 5
1 4	1 2 6	1 2 3 8	1 2 3 4 10
2 3	1 3 5	1 2 4 7	1 2 3 5 9
3 4	1 5 6	1 2 7 8	1 2 3 9 10
	2 3 4	1 3 4 6	1 2 4 5 8
	2 4 6	1 3 6 8	1 2 4 8 10
	3 4 5	1 4 6 7	1 2 5 8 9
	4 5 6	1 6 7 8	1 2 8 9 10
		2 3 4 5	1 3 4 5 7
		2 3 5 8	1 3 4 7 10
		2 4 5 7	1 3 5 7 9
		2 5 7 8	1 3 7 9 10
		3 4 5 6	1 4 5 7 8
		3 5 6 8	1 4 7 8 10
		4 5 6 7	1 5 7 8 9
		5 6 7 8	1 7 8 9 10
			2 3 4 5 6
			2 3 4 6 10
			2 3 5 6 9
			2 3 6 9 10
			2 4 5 6 8
			2 4 6 8 10
			2 5 6 8 9
			2 6 8 9 10
			3 4 5 6 7
			3 4 6 7 10
			3 5 6 7 9
			3 6 7 9 10
			4 5 6 7 8
			4 6 7 8 10
			5 6 7 8 9
			6 7 8 9 10

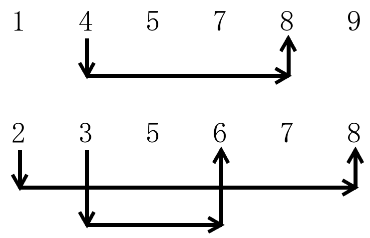
●2nの場合、最大要素数がnとなるが、条件を満たす集合の個数を示す。

2n	最大要素数	集合の個数
2	1	2
4	2	4
6	3	8
8	4	16
10	5	32
12	6	64
14	7	128
16	8	256
18	9	512
20	10	1024
22	11	2048
24	12	4096
26	13	8192
28	14	16384
30	15	32768

予想：集合の個数＝2^{n}

（２）1から2nまでの整数の中から任意にn+1個の数を選びだしたとき、
その中に一方が他方を割り切るような２つの数の組が必ずあることを示せ。

●例　n=5の場合



選んだn+1個の数を$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$とする。各$x_i$について因数2をまとめて、

$$x_i = 2^{c_i} y_i$$

とする。ただし、c_iはx_iに含まれている2の個数とする。

したがって、y_iは奇数になる。①　　　　はn+1個の奇数となるが、2n以下の奇数は、②　　　　のn個しかない。そこで、部屋割論法により、

$$y_i = y_j \ (i \neq j)$$

となるものがあることがわかる。この結果、

$$x_i = 2^{c_i} y_i、 x_j = 2^{c_j} y_j$$

が成り立つが、

$c_i < c_j$のとき、x_iはx_jを③　　　　

$c_i > c_j$のとき、x_jはx_iを④　　　　

すなわち、命題が証明された。

（考察） 1から2nまでの整数の中で、他の数で割り切れる数を含まない集合を考える。

n+1から2nまでのn個の要素からなる集合{n+1, n+2, …, 2n−1, 2n}は必ず条件を満たす。また、一般に、

「1から2nまでの整数の中から任意にn+1個の数を選びだしたとき、
その中に一方が他方を割り切るような２つの数の組が必ずある」

が成り立つ。したがって、条件を満たす集合の最大要素数はnであることがわかる。

●2nの場合、最大要素数がn、求める集合を示す。

2n=4	2n=6	2n=8	2n=10
2 3	2 3 5	2 3 5 7	4 5 6 7 9
3 4	3 4 5	3 4 5 7	4 6 7 9 10
	4 5 6	3 5 7 8	5 6 7 8 9
		4 5 6 7	6 7 8 9 10
		5 6 7 8	

●2nの場合、最大要素数がnとなるが、条件を満たす集合の個数を示す。

2n	最大要素数	集合の個数
2	1	2
4	2	2
6	3	3
8	4	5
10	5	4
12	6	6
14	7	12
16	8	10
18	9	14
20	10	26
22	11	26
24	12	34
26	13	68
28	14	48
30	15	72
32	16	120
34	17	120
36	18	168
38	19	336
40	20	264
42	21	396
44	22	792
46	23	624
48	24	816
50	25	1632

問題４　四隅同色問題

（１）2×5の盤がある。各マス目を白と黒のどちらかで塗る。
このとき、どのような塗り方をしても、少なくとも２つの列の塗り方は同じであることを示せ。

2×5の盤

白	黒	白	黒	黒
黒	黒	白	白	黒

塗り方の例

列方向の2個のマス目の塗り方として、つぎの4種類の塗り方が考えられる。

白	白	黒	黒
白	黒	白	黒

ここで、部屋割論法（ 4種類の塗り方 が、4個の部屋に対応し、 5個の列方向の2個のマス目 が、5人の客に対応する）により、少なくとも2種類の同じ塗り方が存在することがわかる。以上より、命題が証明された。

（２）3×9の盤がある。各マス目を白と黒のどちらかで塗る。
このとき、どのような塗り方をしても、少なくとも２つの列の塗り方は同じであることを示せ。

3×9の盤

白	黒	黒	白	白	白	黒	白	黒
黒	白	白	白	黒	白	黒	白	黒
黒	白	黒	白	白	黒	白	黒	黒

塗り方の例

列方向の3個のマス目の塗り方として、つぎの8種類の塗り方が考えられる。

白	白	白	白	黒	黒	黒	黒
白	白	黒	黒	白	白	黒	黒
白	黒	白	黒	白	黒	白	黒

ここで、部屋割論法（①　　　　　　が、8個の部屋に対応し、②　　　　　　が、9人の客に対応する）により、少なくとも2種類の同じ塗り方が存在することがわかる。以上より、命題が証明された。

（考察） n×（2^n+1）（n≧2） の盤がある。各マス目を白と黒のどちらかで塗る。
このとき、どのような塗り方をしても、少なくとも２つの列の塗り方は同じである。

（３）3×7の盤がある。各マス目を白と黒のどちらかで塗る。このとき、少なくともひとつの長方形の４つの角のマス目は、同色になっていることを示せ。

3×7の盤

白	黒	黒	白	白	白	黒
黒	白	白	白	黒	白	黒
黒	白	黒	黒	黒	黒	白

塗り方の例（４つの角は白）

列方向の3個のマス目の塗り方として、

白	白	白	白	黒	黒	黒	黒
白	白	黒	黒	白	白	黒	黒
白	黒	白	黒	白	黒	白	黒

のように8種類の塗り方が考えられる。２つに場合分けして考える。

（イ）ある列方向が同じ色で塗られている場合。
（ロ）どの列方向も同じ色で塗られていない場合。

（イ）ある列方向が同じ色で塗られている場合。

ある列方向が（白３個）の塗り方と仮定しても一般性を失わない。

残りの列方向３個のマス目に（白２個、黒１個）の塗り方のいずれかが含まれているとき、必ず４つの角で白の長方形ができる。

白	白
白	白
白	黒

白	白
白	黒
白	白

白	黒
白	白
白	白

また、残りの列方向３個のマス目が（白１個、黒２個），（黒３個）の塗り方のいずれかの場合は、どれかの塗り方は複数存在することから、４つの角が黒の長方形ができる。

白	白
黒	黒
黒	黒

黒	黒
白	白
黒	黒

黒	黒
黒	黒
白	白

黒	黒
黒	黒
黒	黒

（ロ）どの列方向も同じ色で塗られていない場合。

（白２個、黒１個） の塗り方が3種類、（白１個、黒２個）の塗り方が3 種類に対して、7個の列方向の置く場所があるので、部屋割論法より、6種類の塗り方のいずれかは、③$\boxed{\quad\quad}$存在する。したがって、４つの角が同色の長方形ができる。以上より、命題が証明された。

（考察） $n\times(2^n-1)$ $(n\geqq3)$ の盤がある。各マス目を白と黒のどちらかで塗る。このとき、少なくともひとつの長方形の４つの角のマス目は、同色になっている。

問題５

（１）10個の自然数がある。これらの中から２つの自然数を適当に選べば、
その差が9で割り切れるような２つの数が必ずあることを示せ。

●例　10個の自然数 24,85,5,38,123,98,45,66,408,15 の場合。

9で割った余りによって分類する。この表から、66と408、24と123、24と15、123と15が条件にあう２つの数であることがわかる。

余り	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	45		38	66	85	5	24		98
				408			123		
							15		

どんな自然数でも9で割ると、余りは 0 から 8 までのどれかになる。

余りについて 9 個の部屋を用意し、10個の自然数を9で割った余りにしたがって、この 9 個の部屋に入れる。

部屋割論法により、どれか２つの自然数は同じ部屋にはいることになる。

ところで、同じ部屋の 2 個の数の差は9で割り切れるので、差が9で割り切れるような 2 個の数があることになる。以上より、命題が証明された。

（考察） n個の自然数がある。これらの中から２つの自然数を適当に選べば、
その差が n-1 で割り切れるような２つの数が必ずある。

（２）n個の自然数を一列に並べたとき、これらの中の連続して並んだ何個かの数の和の中に、nの倍数となるものが必ずあることを示せ。

n個の自然数を$a_1, a_2, \cdots, a_n$とする。つぎのようなn+1個の和$b_0, b_1, \cdots, b_n$を考える。

$b_0=0,$
$b_1=a_1,$
$b_2=a_1+a_2,$
$\cdots$
$b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$
$\cdots$
$b_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$

すなわち、b_kは、a_1からa_kまでの和と定義する。これらをnで割った余りは、$0, 1, \cdots, n-1$のいずれかとなる。

そうすると、部屋割論法（n個の余り$0, 1, \cdots, n-1$がn個の部屋に対応し、n+1個の数$b_0, b_1, \cdots, b_n$がn+1人の客に対応する）により、
n+1個の数$b_0, b_1, \cdots, b_n$のうち、少なくとも２つのb_i, b_j（$b_j > b_i$）において、nで割った余りが①　　　　なる。

すなわち、b_j-b_i（$=a_{i+1}+\cdots+a_j$）がnで②　　　　　ことになる。これは、一列中の連続して並んだ何個かの数の和がnで割り切れることを意味する。
以上より、命題が証明された。

●例　$n=6, a_1=11, a_2=20, a_3=9, a_4=41, a_5=3, a_6=15$の場合。

$b_0=0$, $b_1=11$, $b_2=31$, $b_3=40$, $b_4=81$, $b_5=84$, $b_6=99$ となり、b_0とb_5、b_4とb_6が6で割った余りが等しい。したがって、$b_5-b_0=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$と$b_6-b_4=a_5+a_6$が6で割り切れることになる。

i － j	和	i － j	和	i － j	和	i － j	和	i － j	和	i － j	和
1 － 1	11	2 － 2	20	3 － 3	9	4 － 4	41	5 － 5	3	6 － 6	15
1 － 2	31	2 － 3	29	3 － 4	50	4 － 5	44	5 － 6	18		
1 － 3	40	2 － 4	70	3 － 5	53	4 － 6	59				
1 － 4	81	2 － 5	73	3 － 6	68						
1 － 5	84	2 － 6	88								
1 － 6	99										

問題６

1g以上8g以下の8種類の分銅の中から、重複なく勝手に5個選び出す。
このとき、互いに他の分銅を含まない２組のグループで、各グループに含まれる分銅の総和が等しいものが存在することを示せ。

５個の選ばれた分銅を{1, 2, 4, 5, 8}とする。このとき、{1, 4, 5}と{2, 8}、{1, 8}と{4, 5}、{1, 5}と{2, 4}等で分銅の総和が等しい。

グループ	8	5	4	2	1	総和
g1	○	○	○	○	○	20
g2	○	○	○	○		19
g3	○	○	○		○	18
g4	○	○	○			17
g5	○	○		○	○	16
g6	○	○		○		15
g7	○	○			○	14
g8	○	○				13
g9	○		○	○	○	15
g10	○		○	○		14
g11	○		○		○	13
g12	○		○			12
g13	○			○	○	11
g14	○			○		10
g15	○				○	9
g16	○					8
g17		○	○	○	○	12
g18		○	○	○		11
g19		○	○		○	10
g20		○	○			9
g21		○		○	○	8
g22		○		○		7
g23		○			○	6
g24		○				5
g25			○	○	○	7
g26			○	○		6
g27			○		○	5
g28			○			4
g29				○	○	3
g30				○		2
g31					○	1

$\{\cancel{2}, 5, \cancel{8}\}$
$\{1, 5, \cancel{8}\}$
$\{5, \cancel{8}\}$
$\{1, \cancel{2}, 4, \cancel{8}\}$
$\{2, 4, \cancel{8}\}$
$\{1, 4, \cancel{8}\}$

$\{\cancel{4}, 8\}$
$\{1, \cancel{2}, 8\}$
$\{2, 8\}$
$\{1, 8\}$
$\{8\}$
$\{1, 2, \cancel{4}, 5\}$
$\{\cancel{2}, 4, 5\}$
$\{1, 4, 5\}$
$\{4, 5\}$
$\{1, 2, 5\}$

$\{\cancel{2}, 5\}$
$\{1, 5\}$
$\{5\}$
$\{1, \cancel{2}, 4\}$
$\{2, 4\}$
$\{1, 4\}$

グループの総数は、３１個。一方、グループの総和の最大は、グループg1で、２０。したがって、同じ総和をもつグループが出てくる。

たとえば、

・グループg6 {2, 5, 8} とg9 {1, 2, 4, 8} は、総和が１５で同じ。
　両者から共通する数字を除くと、{5} {1, 4} となる。

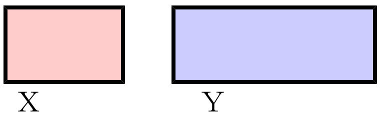
・グループg14 {2, 8} とg19 {1, 4, 5} は、総和が１０で同じ。
　両者に共通する数字がないので、{2, 8} {1, 4, 5} となる。

８種類の分銅から５種類の分銅を選ぶすべての組合せ①　　　通りについて、同様のことが成り立つ。

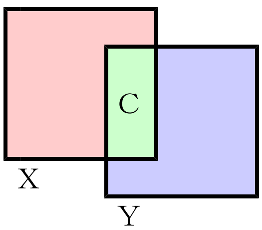
さて、５個の要素からなる集合Ｓの部分集合は、空集合を除くと、３１個存在する。一方、部分集合の要素の総和の最大値は、Ｓ＝{4, 5, 6, 7, 8}としたときに３０となる。すなわち、部分集合の要素の総和で分類すると、部分集合の総数３１個が部分集合の要素の総和の最大値３０より大きくなる。

そこで、部屋割論法（３０個の総和の値が３０個の②　　　に対応し、３１個の部分集合が３１人の③　　　に対応する）により、相異なる部分集合で、それぞれの要素の総和が一致する部分集合Ｘ，Ｙがある。

部分集合Ｘ, Ｙが互いに素ならば、この部分集合Ｘ, Ｙが題意を満たす。



部分集合Ｘ, Ｙに共通部分（Ｃ）があるときは、Ｘ, Ｙから共通部分（Ｃ）を除くことにより得られる部分集合　Ｘ−Ｃ　と部分集合④　　　が題意を満たす。



以上より、証明された。

（考察） {1, 2, . . . , n}の分銅が与えられたとき、重複なく勝手にk個の分銅を選び出す。このとき、互いに他の分銅を含まない２組のグループで、各グループに含まれる分銅の総和が等しいものが必ず存在するためにkが満たす条件はつぎのようになる。

nが1の場合、問題が成立しない。

nが2の場合、条件を満たす解はない。

nが3の場合、k=3で、{1, 2}, {3}のみ。

nが4の場合、k=3で、{1, 2}, {3}となるが、{1, 2, 4}を選び出すと
条件を満たす解はない。
したがって、k=4で、{1, 3}, {4}　{1, 4}, (2, 3}となる。

nが5以上の場合、

n	k
5	4
5 ～ 8	5
9 ～ 12	6
13 ～ 21	7
22 ～ 35	8
36 ～ 60	9
61 ～ 106	10
107 ～ 191	11
192 ～ 346	12
347 ～ 636	13
637 ～ 1176	14
1177 ～2191	15

①部分集合の個数：2^k-1

②総和が最大になる部分集合 {n-k+1, n-k+2, …, n-1, n}

部分集合要素の最大値：$\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{(n-k)(n-k+1)}{2}$

①＞② が成り立つとき、部屋割論法から題意を満たす２つのグループが見つかる。

$$\frac{2^k - 1}{k} + \frac{k-1}{2} > n$$

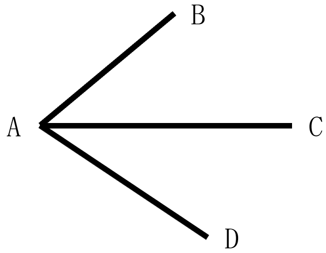
問題 7

サッカー大会に6チームが参加しました。この6チームの中には、今までにお互いに対戦した3チームがあるか、または今までにお互いに一度も対戦したことがない3チームがあることを示せ。

6チームのひとつをAチームとする。他の5チームをAチームと対戦したことがあるかないかで2組に分類すると、部屋割論法（2組が2個の部屋に対応し、5チームが5人の客に対応する）により、どちらかの組は①　　チーム以上になる。

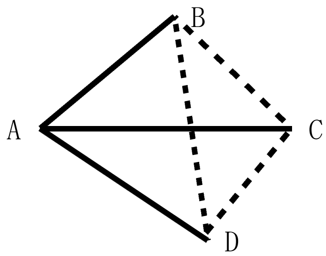
対戦チーム数	未対戦チーム数
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0

まず、Aチームと対戦したチームが3チーム以上だったとし、これらのチームをB,C,Dとする。



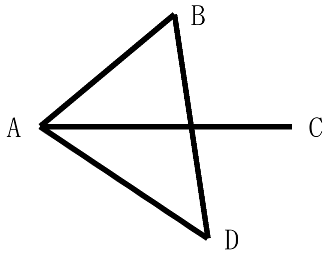
実線は対戦したことを意味する。

もしB,C,Dのいずれも互いに対戦したことがなかったら、この3チームが条件にあう3チームということになる。



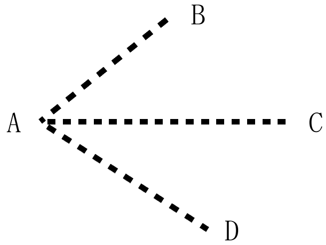
点線は未対戦を意味する。

もしB,C,Dの中にお互いに対戦したチーム(仮にB,Dとする)があったら、この2チームとAチームが条件にあう3チームということになる。

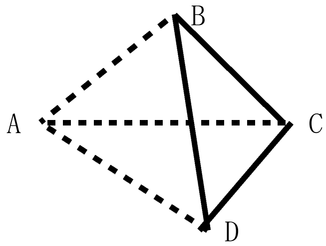


したがって、いつも条件にあう②　　チームがあることになる。

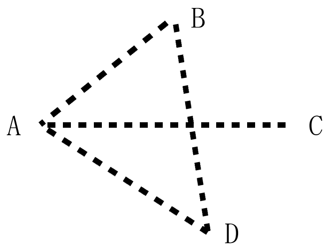
　つぎに、Aチームと対戦しなかったチームが3チーム以上だったとし、これらのチームをB,C,Dとする。



　もしB,C,Dのいずれも互いに対戦していたら、この3チームが条件にあう3チームということになる。



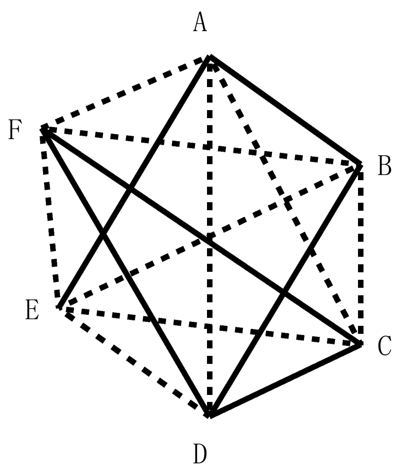
　もしB,C,Dの中にお互いに対戦していないチーム(仮にB,Dとする)があったら、この2チームとAチームが条件にあう3チームということになる。



したがって、いつも条件にあう③　　　チームがあることになる。
　以上より、命題が証明された。

　例として、6チーム（A,B,C,D,E,F）の対戦表から互いに対戦した3チームと互いに対戦していない3チームを求めた。○は対戦した場合、対戦しなかった場合は空白とする。実線は対戦した関係、点線は対戦していない関係を示す。

	A	B	C	D	E	F
A		○			○	
B	○			○		
C				○		○
D		○	○			○
E	○					
F			○	○		

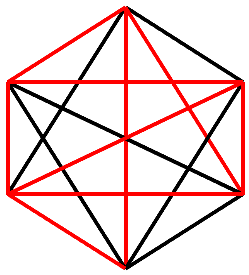


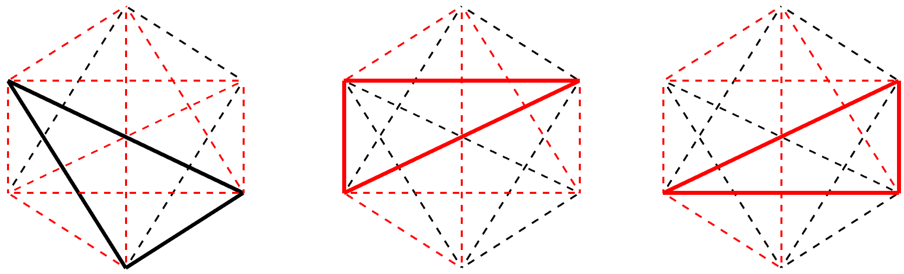
互いに対戦した3チーム
{C,D,F}

互いに対戦していない3チーム
{B,C,E},{B,E,F}

（考察１）この問題は、つぎのように言い換えることができる。

「6個の点同士を線で結んだ図形を考える。この図形の辺（点と点を結んだ線分）を2色（黒、赤）のいずれかの色で塗る。このとき、三辺とも同色の三角形が必ず存在する。」





（考察２）

「17個の点同士を線で結んだ図形を考える。この図形の辺（点と点を結んだ線分）を3色（黒、赤、青）のいずれかの色で塗る。このとき、三辺とも同色の三角形が必ず存在する。」

ひとつの点(A)に着目し、その点から出ている16本の辺を考える。各辺には3色のいずれかが塗られるので、少なくとも6本の同じ色（仮に黒とする）の辺がある。

点Aと6本の辺でつながる点を、B,C,D,E,F,Gとすると、辺AB,AC,AD,AE,AF,AGの色は黒となる。

ここで、6個の点、B,C,D,E,F,Gについて、２つの場合を考える。

場合１：6個の点間の辺の少なくともひとつが（たとえば、BC）黒の場合

この場合、三角形ABCが黒の同色三角形となる。

場合２：6個の点間の辺が、赤または青の場合

考察１より、同色の三角形が必ず存在する。

結局、命題が示せた。