コインパズル・偽コイン問題

目次

問題１　バネ秤問題

１０個のコインからなる３つの山（Ａ, Ｂ, Ｃ）がある。３つの山のうち１つの山のコインはすべて偽物であるが、どの山なのかわからない。
さて、本物の１個の重さは５ｇ、偽物の１個の重さは４ｇである。
バネ秤(重さを数値で示す)を１回使って、どの山が偽物か見つけることができる。

（１）１０個のコインからなる３つの山がある。３つの山のうち、
　　いくつかの山のコインはすべて偽物であるがどの山かわからない。
　　さて、本物の１個の重さは５ｇ、偽物の１個の重さは４ｇである。
　　バネ秤を１回使って、どの山が偽物か見つけよ。

問題２　軽いコインを１個検出

コインが９個ある。このうち１個は軽いことがわかっている。
天秤を３回使ってこの軽いコインを見つけだせる。

（１）コインが１２個ある。このうち１個は軽いことがわかっている。
　　天秤を３回使って軽いコインを見つけだす方法を考察せよ。

問題３　重いまたは軽いコインを１個検出

コインが３個ある。その中に１個だけ他とは重さの違うものがある。
天秤を２回使ってこのコインを見つけ重いか軽いか判定できる。

（１）コインが４個ある。その中に１個だけ他とは重さの違うものがある。
　　天秤を３回使ってこのコインを見つけ重いか軽いか判定せよ。

問題４　偽物コインを複数個検出

見かけは同じ６個のコイン（x1, x2, x3, x4, x5, x6）がある。
このうち３個が偽物で本物より少し軽いとする。
天秤を使って、次の結果から偽物のコインを全部見つけることができる。

(a) $x1+x2=x3+x4$
(b) $x1+x4<x5+x6$
(c) $x2+x6>x3+x5$

（１）見かけは同じ６個のコインがある。このうち２個が偽物で本物より
　　少し重いとする。天秤を３回使って偽物のコインを２個見つけよ。

問題１　バネ秤問題

１０個のコインからなる３つの山（Ａ，Ｂ，Ｃ）がある。３つの山のうち１つの山のコインはすべて偽物であるが、どの山なのかわからない。
さて、本物の１個の重さは５ｇ、偽物の１個の重さは４ｇである。
バネ秤(重さを数値で示す)を１回使って、どの山が偽物か見つけることができる。

山Ａからa枚、山Ｂからb枚、山Ｃからc枚取り出すとする。

A	B	C	バネ秤の数値
本物	本物	偽物	５×ａ＋５×ｂ＋４×ｃ
本物	偽物	本物	５×ａ＋４×ｂ＋５×ｃ
偽物	本物	本物	４×ａ＋５×ｂ＋５×ｃ

バネ秤の数値がすべて異なる必要がある。

$$5a+5b+4c = (4a+4b+4c)+a+b$$
$$5a+4b+5c = (4a+4b+4c)+a+c$$
$$4a+5b+5c = (4a+4b+4c)+b+c$$

すなわち、 a+b, b+c, c+a がすべて異なればよい。一つの解として、

$$a = 1,\ b = 2,\ c = 3$$

が見つかる。バネ秤の数値を求めるとつぎのようになる。

A	B	C	バネ秤の数値
本物	本物	偽物	５×１＋５×２＋４×３＝27
本物	偽物	本物	５×１＋４×２＋５×３＝28
偽物	本物	本物	４×１＋５×２＋５×３＝29

バネ秤の数値から偽物の山がわかる。

27gならCが偽物、28gならBが偽物、29gならAが偽物。

別解として、a ＝ 4, b ＝ 2, c ＝ 1　もある。バネ秤の数値ー(4a+4b+4c)を求め、２進表示すると偽物の山を知ることができる。ただし、本物を1、偽物を0に対応づける。

A	B	C	バネ秤の数値	ABC
本物	本物	偽物	５×４＋５×２＋４×１＝34	6=110
本物	偽物	本物	５×４＋４×２＋５×１＝33	5=101
偽物	本物	本物	４×４＋５×２＋５×１＝31	3=011

（１）　１０個のコインからなる３つの山がある。３つの山のうち、いくつかの山のコインはすべて偽物であるがどの山なのかわからない。
さて、本物の１個の重さは５ｇ、偽物の１個の重さは４ｇである。
バネ秤を１回使って、どの山が偽物か見つける問題を考察する。

Ａからａ枚、Ｂからｂ枚、Ｃからｃ枚取り出すとする。

A	B	C	バネ秤の数値
本物	本物	本物	５×ａ＋５×ｂ＋５×ｃ
本物	本物	偽物	５×ａ＋５×ｂ＋４×ｃ
本物	偽物	本物	５×ａ＋４×ｂ＋５×ｃ
本物	偽物	偽物	５×ａ＋４×ｂ＋４×ｃ
偽物	本物	本物	４×ａ＋５×ｂ＋５×ｃ
偽物	本物	偽物	４×ａ＋５×ｂ＋４×ｃ
偽物	偽物	本物	４×ａ＋４×ｂ＋５×ｃ
偽物	偽物	偽物	４×ａ＋４×ｂ＋４×ｃ

バネ秤の数値が①＿＿＿＿＿＿必要がある。

5a+5b+5c = (4a+4b+4c)+a+b+c
5a+5b+4c = (4a+4b+4c)+a+b
5a+4b+5c = (4a+4b+4c)+a+c
5a+4b+4c = (4a+4b+4c)+a
4a+5b+5c = (4a+4b+4c)+b+c
4a+5b+4c = (4a+4b+4c)+b
4a+4b+5c = (4a+4b+4c)+c
4a+4b+4c = (4a+4b+4c)

すなわち、②＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿がすべて異なればよい。

一つの解として、

a = 4, b = 2, c = 1

が見つかる。

A	B	C	バネ秤の数値
本物	本物	本物	５×４＋５×２＋５×１＝35
本物	本物	偽物	５×４＋５×２＋４×１＝34
本物	偽物	本物	５×４＋４×２＋５×１＝33
本物	偽物	偽物	５×４＋４×２＋４×１＝32
偽物	本物	本物	４×４＋５×２＋５×１＝31
偽物	本物	偽物	４×４＋５×２＋４×１＝30
偽物	偽物	本物	４×４＋４×２＋５×１＝29
偽物	偽物	偽物	４×４＋４×２＋４×１＝28

バネ秤の数値－(4a+4b+4c)を求め、２進表示すると、A,B,Cと対応する。
ただし、本物を1、偽物を0に対応づける。

A	B	C	バネ秤の数値	ABC
本物	本物	本物	５×１＋５×２＋５×４＝35	7=111
本物	本物	偽物	５×１＋５×２＋４×４＝34	6=110
本物	偽物	本物	５×１＋４×２＋５×４＝33	5=101
本物	偽物	偽物	５×１＋４×２＋４×４＝32	4=100
偽物	本物	本物	４×１＋５×２＋５×４＝31	3=011
偽物	本物	偽物	４×１＋５×２＋４×４＝30	2=010
偽物	偽物	本物	４×１＋４×２＋５×４＝29	1=001
偽物	偽物	偽物	４×１＋４×２＋４×４＝28	0=000

問題２　軽いコインを１個検出

　コインが９個ある。このうち１個は軽いことがわかっている。
天秤を２回使ってこの軽いコインを見つけだせる。

解法：ほぼ３等分する

a1+a2+a3 ＜ a4+a5+a6 a1, a2, a3に軽いコインがある。	a1 ＜ a2	a1	が軽い
	a1 ＝ a2	a3	が軽い
	a1 ＞ a2	a2	が軽い
a1+a2+a3 ＝ a4+a5+a6 a7, a8, a9に軽いコインがある。	a7 ＜ a8	a7	が軽い
	a7 ＝ a8	a9	が軽い
	a7 ＞ a8	a8	が軽い
a1+a2+a3 ＞ a4+a5+a6 a4, a5, a6に軽いコインがある。	a4 ＜ a5	a4	が軽い
	a4 ＝ a5	a6	が軽い
	a4 ＞ a5	a5	が軽い

（１）コインが１２個ある。このうち１個は軽いことがわかっている。
　　　天秤を３回使ってこの軽いコインを見つけだす方法を考察せよ。

問題３　重いまたは軽いコインを１個検出

　コインが３個ある。その中に１個だけ他とは重さの違うものがある。
天秤を２回使ってこのコインを見つけ重いか軽いか次の方法で判定できる。

　３枚のコインをx1, x2, x3とおく。本物aとする。

(1) $\boxed{\text{x1 ＜ x2}}$ の場合。x1は軽いか本物。x2は重いか本物。x3:本物。

　(1.1) $\boxed{\text{a ＜ x1}}$ の場合。起こり得ない。
　(1.2) $\boxed{\text{a ＝ x1}}$ の場合。x1:本物。x2:重。
　(1.3) $\boxed{\text{a ＜ x1}}$ の場合。x1:軽。x2:本物。

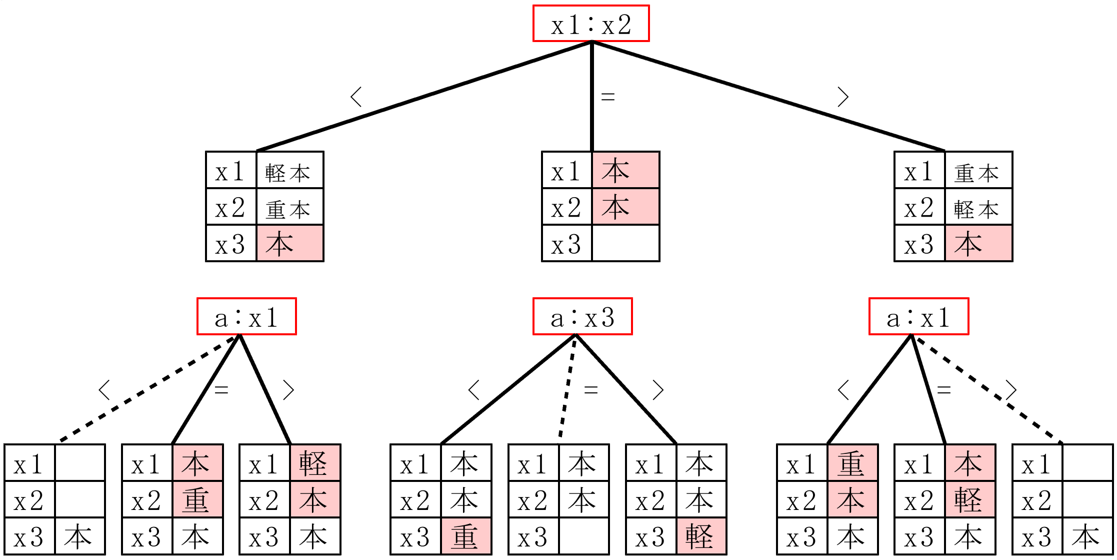
(2) $\boxed{\text{x1 ＝ x2}}$ の場合。x1:本物。x2:本物。

　(2.1) $\boxed{\text{a ＜ x3}}$ の場合。x3:重。
　(2.2) $\boxed{\text{a ＝ x3}}$ の場合。起こり得ない。
　(2.3) $\boxed{\text{a ＞ x3}}$ の場合。x3:軽。

(3) $\boxed{\text{x1 ＞ x2}}$ の場合。x1は重いか本物。x2は軽いか本物。x3:本物。

　(3.1) $\boxed{\text{a ＜ x1}}$ の場合。x1:重。x2:本物。
　(3.2) $\boxed{\text{a ＝ x1}}$ の場合。x1:本物。x2:軽。
　(3.3) $\boxed{\text{a ＞ x1}}$ の場合。起こり得ない。

●樹形図



（１） コインが４個ある。その中に１個だけ他とは重さの違うものがある。
　　天秤を３回使ってこのコインを見つけ重いか軽いか判定せよ。

問題４　偽物コインを複数個検出

見かけは同じ６個のコイン（x1, x2, x3, x4, x5, x6）がある。このうち３個が偽物で本物より少し軽いとする。天秤を使って、次の結果から偽物のコインを全部見つけることができる。

(a) x1+x2=x3+x4
(b) x1+x4<x5+x6
(c) x2+x6>x3+x5

解法１： コイン６個の内、３個が偽物の組合せは、C(6,3)=6!/(3!3!)=20 通り。
それらを列挙し、(a), (b), (c)を満たすものを探す。
×を偽物、○を本物とする。

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	(a)	(b)	(c)
1	×	×	×	○	○	○	不成立		
2	×	×	○	×	○	○	不成立		
	×	○	○	×	×	○	成立	成立	成立
20	○	○	○	×	×	×			

解法２：　条件(a),(b),(c)の順に候補を絞り込む。

６個のコインから４個{x1,x2,x3,x4}選ぶと、この中に偽物が少なくとも１個、多くとも３個含まれている。その組合せは、全部で１４通りある。
×を偽物、○を本物とする。

	x1	x2	x3	x4	
1	×	○	○	○	
2	○	×	○	○	偽物１個
3	○	○	×	○	
4	○	○	○	×	
5	×	×	○	○	
6	×	○	×	○	
7	○	×	×	○	偽物２個
8	×	○	○	×	
9	○	×	○	×	
10	○	○	×	×	
11	×	×	×	○	
12	×	×	○	×	偽物３個
13	×	○	×	×	
14	○	×	×	×	

(a)の結果（x1+x2=x3+x4）より、{x1,x2}の中に偽物が1個、{x3,x4}の中に偽物が1個あることがわかり、４通りの組合せが考えられる。

	x1	x2	x3	x4	
	×	○	○	○	偽物１個
	○	×	○	○	
	○	○	×	○	
	○	○	○	×	
	×	×	○	○	偽物２個
6	×	○	×	○	
7	○	×	×	○	
8	×	○	○	×	
9	○	×	○	×	
	○	○	×	×	
	×	×	×	○	偽物３個
	×	×	○	×	
	×	○	×	×	
	○	×	×	×	

そうすると、全部で３個の偽物があることから{x5,x6}の中にも偽物が1個含まれていることになり、解の候補は、８通りに絞られる。

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
6	×	○	×	○	×	○
6	×	○	×	○	○	×
7	○	×	×	○	×	○
7	○	×	×	○	○	×
8	×	○	○	×	×	○
8	×	○	○	×	○	×
9	○	×	○	×	×	○
9	○	×	○	×	○	×

ここで、(b)の結果（x1+x4<x5+x6）が成り立つものを残すと、x1とx4が偽物であることがわかる。

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
	×	○	×	○	×	○
	×	○	×	○	○	×
	○	×	×	○	×	○
	○	×	×	○	○	×
8	×	○	○	×	×	○
8	×	○	○	×	○	×
	○	×	○	×	×	○
	○	×	○	×	○	×

したがって、x2,x3が本物であることになる。

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
8	×	○	○	×	×	○
8	×	○	○	×	○	×

そうすると、(c)の結果（x2+x6>x3+x5）より、x5が偽物、x6が本物であることがわかる。

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
8	×	○	○	×	×	○
	×	○	○	×	○	×

結局、x1,x4,x5が偽物とわかる。

（１）見かけは同じ６個のコインがある。このうち２個が偽物で本物より少し重いとする。天秤を３回使って偽物のコインを２個見つけよ。