

コインパズル・ゲーム

目次

問題 1 コイン裏返しゲーム

11個のコインを表が見えるように一列に並べる。2人で交互に裏返していき、裏返せなくなったら負けというゲームを考える。
ただし、すでに裏返されたコインに隣接するコインは裏返せない。
先手必勝であることを示せ。

問題 2 1山崩しゲーム

(1) $n(n \geq 1)$ 個の石の山がある。

ルール1 : 2人で交互に1個以上高々 k 個までの石を取り除いていく。
ルール2 : 石を取り除けなくなったら負け。

先手が勝つか後手が勝つか考察せよ。

(2) $n(n \geq 1)$ 個の石の山がある。

ルール1 : 2人で交互に1個以上半数以下の石を取り除いていく。
(石が n 個の場合、 $1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$)
ルール2 : 石を取り除けなくなったら負け。

先手が勝つか後手が勝つか考察せよ。

問題 3 山分けゲーム

(1) $a(\geq 1)$ 個のコインからなる山と $b(\geq 1)$ 個のコインからなる山がある。

ルール1 : 与えられた2つの山のうち、**1つを取り除き**、残りの山を2つに分け相手に渡す操作を2人で交互に行う。
ルール2 : 山を分けられなくなったら負け。

先手が勝つか後手が勝つか考察せよ。

(2) $a(\geq 1)$ 個のコインからなる山と $b(\geq 1)$ 個のコインからなる山がある。

ルール1 : 与えられた2つの山のうち、**少ない山を取り除き**、残りの山を2つに分け相手に渡す操作を2人で交互に行う。
ルール2 : 山を分けられなくなったら負け。

先手が勝つか後手が勝つか考察せよ。

問題 1 コイン裏返しゲーム

11個のコインを表が見えるように一列に並べる。2人で交互に裏返していき、裏返せなくなったら負けというゲームを考える。ただし、すでに裏返されたコインに隣接するコインは裏返せない。先手必勝であることを示せ。

A B C D E F G H I J K
 ○○○○○○○○○○○○
 [例]

A B C D E F G H I J K
 ○○○○○○○○○○○○

①先手がFを裏返す。EとGが塗れなくなる。

A B C D E F G H I J K
 ○○○○×●×○○○○

②後手がBを裏返す。AとCが塗れなくなる。

A B C D E F G H I J K
 ×●×○×●×○○○○

③先手がJを塗る。IとKが塗れなくなる。

A B C D E F G H I J K
 ×●×○×●×○×●×

④後手がHを塗る。

A B C D E F G H I J K
 ×●×○×●×●×●×

⑤先手がDを塗る。

A B C D E F G H I J K
 ×●×●×●×●×●×

⑥後手は塗れなくなるので負け。先手の勝ち。

先手は① をまず塗る。その後、後手が塗ったます目と② は、必ず空いているので、先手は、常に塗ることができる。後手は、つぎつぎ塗ることができるます目を探さなくてはならないので、結局、塗れなくなる。

問題 2 1 山崩しゲーム

(1) $n(n \geq 1)$ 個の石の山がある。

ルール 1 : 2人で交互に1個以上高々 k 個までの石を取り除いていく。

ルール 2 : 石を取り除けなくなったら負け。

先手が勝つか後手が勝つか考察せよ。

● $k=3$ の場合

石を取り除ける立場の方が勝てる場合○、どうしても負ける場合×とする。

①最初の石が1, 2, 3の場合、○となる。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
○	○	○												

②最初の石が4の場合、

$4-1=3$, $4-2=2$, $4-3=1$ となり相手を負けの状態に出来ないので、×。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
○	○	○	×											

③最初の石が5の場合、

$5-1=4$ で相手を負けの状態にできるので、○。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
○	○	○	×	○										

④最初の石が6の場合、

$6-2=4$ で相手を負けの状態にできるので、○。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
○	○	○	×	○	○									

⑤最初の石が7の場合、

$7-3=4$ で相手を負けの状態にできるので、○。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
○	○	○	×	○	○	○								

⑥最初の石が8の場合、

$8-1=7$, $8-2=6$, $8-3=5$ で相手を負けの状態にできないので、×。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
○	○	○	×	○	○	○	×							

⑦後は同様。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
○	○	○	×	○	○	○	×	○	○	○	×	○	○	○

必勝法：相手側が常に×になるように石を取り除いていけば勝つ。
すなわち、相手側の石の個数が① **4の倍数** になるようにする。

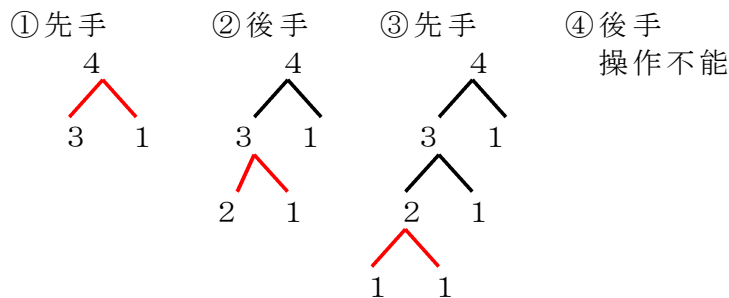
問題3 山分けゲーム

$a(a \geq 1)$ 個のコインからなる山がある。

ルール1	コインの個数が2個以上の山を選び、山を2つに分ける操作を2人で交互に行う。
ルール2	山を分けられなくなったら負け。

先手が勝つか後手が勝つか考察する。

● $a=4$ の場合、

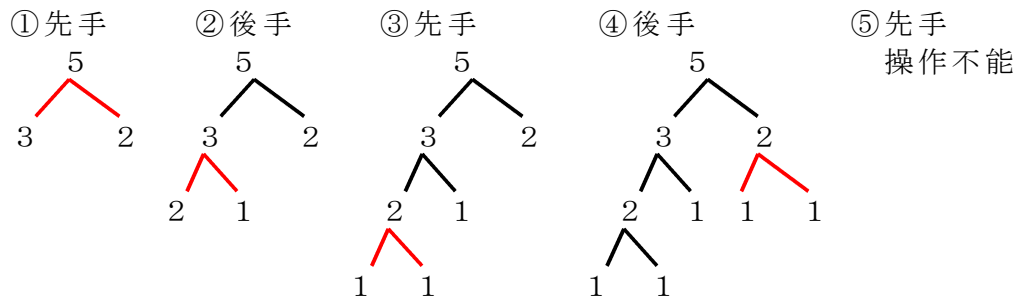


したがって、この例では、先手勝ち、後手負け。

1回の操作で山がひとつ増えていく。どのように山を分けても3回の操作で個数が1の山が4個でき、これ以上操作を続けられなくなる。
したがって、

先手	勝ち
後手	負け

● a=5の場合。



したがって、この例では、先手負け、後手勝ち。

1回の操作で山がひとつ増えていく。どのように山を分けても4回の操作で個数が1の山が5個でき、これ以上操作を続けられなくなる。したがって、

先手	負け
後手	勝ち

● 一般の場合

1回の操作で山がひとつ増えていく。どのように山を分けても a-1 回の操作で個数が1の山が a 個でき、これ以上操作を続けられなくなる。したがって、

・ aが偶数の場合

先手	勝ち
後手	負け

・ aが奇数の場合

先手	負け
後手	勝ち

(1) a(≥1)個のコインからなる山とb(≥1)個のコインからなる山がある。

ルール 1	与えられた2つの山のうち、1つを取り除き、残りの山を2つに分け相手に渡す操作を2人で交互に行う。
ルール 2	山を分けられなくなったら負け。

先手が勝つか後手が勝つか考察せよ。

山をA, Bとする。

自分の番になって、勝てる方法がある場合○、どうしても負ける場合×とする。

(a) A=1, B=1の場合、① ので×。

A \ B	1	2	3
1	×		
2			

(b) $A=2, B=1$ の場合、山Bを取り去り山Aを2つに分ければ、相手を② の状態に置くので○。問題の対称性から、 $A=1, B=2$ も同様。

A \ B	1	2	3
1	×	○	
2	○		

(c) $A=3, B=1$ の場合、山Aを取り去ると自分が③ の状態になる。
山Bを取り去ると $A=2, B=1$ の状態になり、相手が④ の状態になる。
したがって、×。問題の対称性から、 $A=1, B=3$ も同様。

A \ B	1	2	3
1	×	○	×
2	○		
3	×		

(d) $A=2, B=2$ の場合、山Aを取り去り、山Bに分けると相手を⑤ の状態にできる。したがって、○。

A \ B	1	2	3
1	×	○	×
2	○	○	
3	×		

(e) $A=5, B=7$ の場合、山Aを取り除いても、山Bを取り除いても、相手が⑥ の状態になる。したがって、×。

A \ B	1	2	3	4	5	6	7
1	×	○	×	○	×	○	
2	○	○	○	○	○		
3	×	○	×	○			
4	○	○	○				
5	×	○					×
6	○						
7							

(f) $A=6, B=7$ の場合、山Aを取り除くと、相手が⑦ の状態になるが、山Bを取り除くと、相手を⑧ の状態にできる。したがって、○。

A \ B	1	2	3	4	5	6	7
1	×	○	×	○	×	○	
2	○	○	○	○	○		
3	×	○	×	○			
4	○	○	○				
5	×	○					
6	○						○
7							

(g) 以後同様

A \ B	1	2	3	4	5	6	7
1	×	○	×	○	×	○	×
2	○	○	○	○	○	○	○
3	×	○	×	○	×	○	×
4	○	○	○	○	○	○	○
5	×	○	×	○	×	○	×
6	○	○	○	○	○	○	○
7	×	○	×	○	×	○	×

一般に、山Aにa個のコイン、山Bにb個のコインがある場合、つぎのようになる。

a	b	状態
奇数	奇数	⑨
奇数	偶数	⑩
偶数	奇数	⑪
偶数	偶数	⑫

必勝法

(2) a(≥ 1)個のコインからなる山とb(≥ 1)個のコインからなる山がある。

ルール 1	与えられた2つの山のうち、少ない山を取り除き、残りの山を2つに分け相手に渡す操作を2人で交互に行う。
ルール 2	山を分けられなくなったら負け。

先手が勝つか後手が勝つか考察せよ。

a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															

必勝法